Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Cosmologia

[5] **Problema 1.** A Equação de Friedmann é uma das mais importantes para o estudo da cosmologia e do estudo sobre o universo. O objetivo do problema é deduzir as equações fundamentais da cosmologia. Primeiro, vamos com algumas definições:

i) Devido à expansão do Universo, a distância entre dois pontos é dada por:

$$r(t) = r_0 a(t)$$

Onde $a(t)$ é conhecido como o fator de escala e r_0 é a distância medida em $t = 0$.

ii) O Universo segue a métrica de Robertson-Walker, a qual pode ser simplificada para:

$$-c^2 dt^2 + dr^2 = 0$$

a) Encontre uma expressão para a distância comóvel, r_0, na forma de integral, a partir das definições dadas anteriormente.

b) A Primeira Equação de Friedmann tem forma:

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = k_1 \varepsilon(t) + \frac{C}{r_0^2 a^2}$$

Encontre os valores das constantes k_1 para um universo esférico, em função de constantes fundamentais. Na equação acima, $\varepsilon(t)$ é a densidade de energia do universo, C é uma constante relacionada à sua energia e a é o fator de escala.

Dica: Você pode obter essa equação tanto por conservação de energia ou utilizando a segunda lei de Newton.

c) Repita o item anterior para um universo cilíndrico se expandindo radialmente. A equação encontrada deve ter forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = f(a)\varepsilon(t) + \frac{C'}{r_0^2 a^2}$$

Encontre a função $f(a)$.

d) Voltando agora para um "universo normal". Em cosmologia, definimos a densidade crítica de energia como sendo a densidade de energia de um universo em que $C = 0$. Encontre uma expressão para a densidade crítica.

e) Reescreva a primeira equação de Friedmann em função de:

$$\Omega(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}$$

Onde $\varepsilon_c(t)$ é a densidade crítica de energia.

[3] **Problema 2.** (Adaptado NAO 2019) Considere um universo plano em que a constante gravitacional deixa de ser constante e passa a ser definida por

$$G(a) = G_0 f(a)$$

Onde $f(a)$ é uma função do fator de escala.

a) Como seria a Equação de Friedmann nesse universo? Assuma que o universo é plano, $C = 0$ e que ele é composto apenas por matéria bariônica ("clara"). Deixe sua resposta em função de H_0, $f(a)$, a e $\Omega_{m,0}$, onde H_0 é o valor da constante de Hubble no tempo atual, e $\Omega_{m,0}$ é o parâmetro de densidade,

No caso em que $f(a) = e^{b(a-1)}$, onde $b = 2$.

b) Estime a idade desse universo assumindo que ele é constituído apenas de matéria bariônica (matéria "clara").

c) Qual o comportamento da idade quando $t \to \infty$?

Talvez você ache as seguintes relações úteis:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \qquad \int_0^{1} x^2 e^{-x^2} \approx 0,189$$

[5] **Problema 3.** (Lista 8 - 2021) A equação de Friedmann é dada por:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2} - \frac{kc^2}{a^2}, \tag{1}$$

em que a é o fator de escala no tempo t, ε é a densidade de energia no tempo t e k é o parâmetro que caracteriza a geometria do universo, podendo assumir qualquer valor real. Considerando um universo composto apenas por matéria bariônica não relativística e resolvendo essa equação diferencial não linear para $k > 0$, obtêm-se as seguintes soluções em termos do parâmetro $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$a(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3kc^4}\left(1 - \cos\theta\right), \tag{2}$$

$$t(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3k^{3/2}c^5}\left(\theta - \sin\theta\right). \tag{3}$$

Considere um universo com $\Omega_0 = 4$ e $H_0 = 67,4$ km/s/Mpc.

a) A partir da equação de Friedmann, mostre que $kc^2 = H^2\left(1 - \Omega\right)a^2$. Por fim, reescreva as equações paramétricas de a e t em termos do parâmetro de densidade atual Ω_0 e da constante de Hubble atual H_0, além do parâmetro θ. Não substitua os seus respectivos valores numéricos.

b) Encontre a idade t_0 do universo em questão em termos de H_0 e em seguida em bilhões de anos.

c) O chamado *Lookback time*, Δt_L, representa quanto tempo no passado o universo estava com certo fator de escala a. Qual é Δt_L em bilhões de anos para quando o tamanho do universo era 1/3 do que é atualmente?

d) Determine θ_n e em seguida t_n para os quais $H = 0$.