Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Cosmologia

[5] **Problema 1.** A Equação de Friedmann é uma das mais importantes para o estudo da cosmologia e do estudo sobre o universo. O objetivo do problema é deduzir as equações fundamentais da cosmologia. Primeiro, vamos com algumas definições:

i) Devido à expansão do Universo, a distância entre dois pontos é dada por:

$$r(t) = r_0 a(t)$$

Onde $a(t)$ é conhecido como o fator de escala e r_0 é a distância medida em $t = 0$.

ii) O Universo segue a métrica de Robertson-Walker, a qual pode ser simplificada para:

$$-c^2 dt^2 + dr^2 = 0$$

a) Encontre uma expressão para a distância comóvel, r_0, na forma de integral, a partir das definições dadas anteriormente.

b) A Primeira Equação de Friedmann tem forma:

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = k_1 \varepsilon(t) + \frac{C}{r_0^2 a^2}$$

Encontre os valores das constantes k_1 para um universo esférico, em função de constantes fundamentais. Na equação acima, $\varepsilon(t)$ é a densidade de energia do universo, C é uma constante relacionada à sua energia e a é o fator de escala.

Dica: Você pode obter essa equação tanto por conservação de energia ou utilizando a segunda lei de Newton.

c) Repita o item anterior para um universo cilíndrico se expandindo radialmente. A equação encontrada deve ter forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = f(a)\varepsilon(t) + \frac{C'}{r_0^2 a^2}$$

Encontre a função $f(a)$.

d) Voltando agora para um "universo normal". Em cosmologia, definimos a densidade crítica de energia como sendo a densidade de energia de um universo em que $C = 0$. Encontre uma expressão para a densidade crítica.

e) Reescreva a primeira equação de Friedmann em função de:

$$\Omega(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}$$

Onde $\varepsilon_c(t)$ é a densidade crítica de energia.

Solução

a) Isolando d_r,

$$d_r = cdt$$

Mas, por definição, $r(t) = r_0 a(t) \rightarrow d_r = r_0 da$. Substituindo,

$$dr_0 = c\frac{dt}{a(t)}$$

Integrando dos dois lados,

$$r_0 = c\int \frac{dt}{a(t)}$$

b) **Método 1: Conservação de energia** Considere uma partícula de massa m localizada em um ponto do universo. A sua energia em relação ao centro do universo é dada por:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM(r)m}{r}$$

Onde $v = \dot{r} = r_0\dot{a}$ e $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho(t)$. Dividindo a equação por $m/2$ e aplicando as substituições, temos:

$$\frac{2E}{m} = r_0^2\dot{a}^2 - \frac{G}{r_0 a}\frac{8\pi(r_0 a)^3\rho(t)}{3}$$

Simplificando,

$$\frac{2E}{m} = r_0^2\dot{a}^2 - \frac{8\pi G r_0^2 a^2 \rho(t)}{3}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{r_0^2 a^2}$, obtemos:

$$\frac{2E}{mr_0^2a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G\rho(t)}{3}$$

Reorganizando a equação e utilizando a equivalência massa-energia, $m = E/c^2 \rightarrow \rho(t) = \varepsilon(t)/c^2$, temos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) + \frac{2E}{mr_0^2a^2}$$

Da onde podemos concluir que,

$$\boxed{k_1 = \frac{8\pi G}{3c^2}}$$

Método 2: Segunda Lei de Newton

Escrevendo a segunda lei de Newton para um corpo com relação ao centro do universo,

$$-\frac{GM(r)m}{r^2} = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

Note que, ao se expandir, o universo não cria massa, então a massa contida em uma camada r será constante ao longo do tempo, usando dessa propriedade, temos que:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

Multiplicando ambos os lados por dr/dt,

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

Reescrevendo,

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{GM(r)}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

Multiplicando ambos os lados por dt,

$$\dot{r}d\dot{r} = -GM(r)\frac{dr}{r^2}$$

Substituindo $r = r_0 a$,

$$r_0^2\dot{a}d\dot{a} = -\frac{GM(r)}{r_0}\frac{da}{a^2}$$

Integrando dos dois lados,

$$r_0^2\int \dot{a}da = -\frac{GM(r)}{r_0^2}\int \frac{da}{a^2}$$

$$\frac{r_0^2\dot{a}^2}{2} = \frac{GM(r)}{r_0 a} + A$$

Onde A é uma constante de integração. Substituindo $M(r)$,

$$\frac{r_0^2\dot{a}^2}{2} = \frac{4\pi G r_0^2 a^2}{3c^2}\varepsilon(t) + A$$

Multiplicando a expressão por $2/a^2 r_0^2$, temos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) + \frac{2A}{r_0^2 a^2}$$

De onde podemos concluir, igualmente, que:

$$\boxed{k_1 = \frac{8\pi G}{3c^2}}$$

c) Utilizando a lei de Gauss,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M(r)$$

Onde,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -g(2\pi r L)$$

Para uma simetria cilíndrica. Substituindo na equação,

$$g = \frac{2GM(r)}{rL}$$

Utilizando o método da conservação de energia, temos primeiramente que calcular a energia potencial,

$$U = -\int F dr = -\int \frac{2GM(r)m}{rL} dr = -\int \frac{2GM(r)m}{L}\frac{da}{a} - \frac{2GM(r)m}{L}\ln(a)$$

Por conservação de energia,

$$E = \frac{mr_0^2\dot{a}^2}{2} - \frac{2GM(r)m}{L}\ln(a)$$

Substituindo $M(r) = \pi r_0^2 a^2 L\varepsilon(t)/c^2$,

$$E = \frac{mr_0^2\dot{a}^2}{2} - \frac{2\pi r_0^2 a^2 Gm\ln(a)}{c^2}\varepsilon(t)$$

Reorganizando,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G\ln(a)}{c^2}\varepsilon(t) + \frac{2E}{mr_0^2a^2}$$

Da onde podemos obter,

$$\boxed{f(a) = \frac{4\pi G}{c^2}\ln(a)}$$

d) A equação de Friedmann para $C = 0$ se reduz a

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_c(t)$$

Isolando $\varepsilon_c(t)$,

$$\boxed{\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G}H^2(t)}$$

Pela definição,

$$\varepsilon(t) = \Omega(t)\varepsilon_c(t)$$

Substituindo na equação,

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2}\Omega(t)\varepsilon_c(t) + \frac{C}{r_0^2 a^2}$$

Substituindo $\varepsilon_c(t)$,

$$H^2(t) = H^2(t)\Omega(t) + \frac{C}{r_0^2 a^2}$$

Resolvendo para $H^2(t)$,

$$\boxed{H^2(t) = \frac{C}{r_0^2 a^2(1 - \Omega(t))}}$$

[3] **Problema 2.** (Adaptado NAO 2019) Considere um universo plano em que a constante gravitacional deixa de ser constante e passa a ser definida por

$$G(a) = G_0 f(a)$$

Onde $f(a)$ é uma função do fator de escala.

a) Como seria a Equação de Friedmann nesse universo? Assuma que o universo é plano, $C = 0$ e que ele é composto apenas por matéria bariônica ("clara"). Deixe sua resposta em função de H_0, $f(a)$, a e $\Omega_{m,0}$, onde H_0 é o valor da constante de Hubble no tempo atual, e $\Omega_{m,0}$ é o parâmetro de densidade,

No caso em que $f(a) = e^{b(a-1)}$, onde $b = 2$.

b) Estime a idade desse universo assumindo que ele é constituído apenas de matéria bariônica (matéria "clara").

c) Qual o comportamento da idade quando $t \to \infty$?

Talvez você ache as seguintes relações úteis:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \qquad \int_0^1 x^2 e^{-x^2} \approx 0,189$$

Solução

a) Para um universo plano e contendo apenas matéria, a equação de Friedmann tem a forma:

$$H(t)^2 = H_0^2 \Omega_m$$

Onde $\Omega_m = \frac{\rho_m(t)}{\rho_{c,0}}$ e

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Para matéria bariônica,

$$\rho_m(t) = \rho_0 a(t)^{-3}$$

Então,

$$\Omega_m = \Omega_{m,0} f(a) a^{-3}$$

Para um universo composto apenas de matéria bariônica, temos $\Omega_{m,0} = 1$. Assim, a equação de Friedmann fica:

$$\boxed{H(a)^2 = H_0^2 \Omega_{m,0} f(a) a^{-3} \equiv H_0^2 f(a) a^{-3}}$$

b) Usando que $H = \frac{\dot{a}}{a}$, temos:

$$t = \int dt = \int da \frac{dt}{da} = \int \frac{da}{\dot{a}}$$

Multiplicando por a/a,

$$t = \int \frac{a}{\dot{a}a} da = \int \frac{da}{H(a)a}$$

Substituindo o valor de $H(a)$ encontrado no item anterior,

$$t = \frac{1}{H_0^2} \int \frac{da}{\sqrt{f(a)a^{-3}}} = \frac{1}{H_0^2} \int a^{3/2} e^{-b(a-1)/2} da = \frac{e^{b/2}}{H_0^2} \int a^{3/2} e^{-ba/2} da$$

Usando uma substituição da forma $x = \sqrt{ba/2}$, temos:

$$t = \frac{4\sqrt{2}e^{b/2}}{b^{3/2} H_0} \int x^2 e^{-x^2}$$

Os limites de integração vão de $a = 0$ (início do universo) até $a = 1$ (momento atual). Como fizemos a substituição em x,

$$x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$$

$$t = \frac{4\sqrt{2}e^{b/2}}{b^{3/2}H_0}\int_0^{\sqrt{b/2}} x^2 e^{-x^2}$$

Substituindo $b = 2$,

$$t = \frac{4\sqrt{2}e}{2^{3/2}H_0}\int_0^{1} x^2 e^{-x^2}$$

Substituindo os valores e utilizando a integral fornecida, obtemos:

$$\boxed{t \approx 15 \text{ Gyr}}$$

O que é próximo do nosso universo!!

c) Mudando os limites da integral para um tempo infinito, $a(t) \to \infty$,

$$\boxed{t_\infty = \frac{4\sqrt{2}e}{2^{3/2}H_0}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}e}{2^{3/2}H_0} \approx 34.1 \text{ Gyr}}$$

[5] **Problema 3.** (Lista 8 - 2021) A equação de Friedmann é dada por:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2} - \frac{kc^2}{a^2}, \tag{1}$$

em que a é o fator de escala no tempo t, ε é a densidade de energia no tempo t e k é o parâmetro que caracteriza a geometria do universo, podendo assumir qualquer valor real. Considerando um universo composto apenas por matéria bariônica não relativística e resolvendo essa equação diferencial não linear para $k > 0$, obtêm-se as seguintes soluções em termos do parâmetro $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$a(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3kc^4}\left(1 - \cos\theta\right), \tag{2}$$

$$t(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3k^{3/2}c^5}\left(\theta - \sin\theta\right). \tag{3}$$

Considere um universo com $\Omega_0 = 4$ e $H_0 = 67,4$ km/s/Mpc.

a) A partir da equação de Friedmann, mostre que $kc^2 = H^2\left(1 - \Omega\right)a^2$. Por fim, reescreva as equações paramétricas de a e t em termos do parâmetro de densidade atual Ω_0 e da constante de Hubble atual H_0, além do parâmetro θ. Não substitua os seus respectivos valores numéricos.

b) Encontre a idade t_0 do universo em questão em termos de H_0 e em seguida em bilhões de anos.

c) O chamado *Lookback time*, Δt_L, representa quanto tempo no passado o universo estava com certo fator de escala a. Qual é Δt_L em bilhões de anos para quando o tamanho do universo era 1/3 do que é atualmente?

d) Determine θ_n e em seguida t_n para os quais $H = 0$.

Solução

a) Pela definição de Ω

$$\Omega = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \frac{\frac{3c^2H^2}{8\pi G} + \frac{3kc^4}{8\pi G a^2}}{\frac{3c^2H^2}{8\pi G}} = 1 + \frac{kc^2}{H^2a^2}$$

Isolando k,

$$\boxed{kc^2 = H^2(\Omega - 1)a^2}$$

Assim como queríamos demonstrar. Para achar as equações de a e t, vamos começar substituíndo kc^2 e lembrando que no tempo atual, $a = 1$. Primeiro, vamos trabalhar somente em $a(\theta)$.

$$a(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3c^2}\frac{(1-\cos\theta)}{H_0^2(\Omega_0 - 1)}$$

Substituindo $\varepsilon_0 = \Omega_0\varepsilon_{c,0} = \Omega_0\frac{3H_0^2c^2}{8\pi G}$

Assim,

$$a(\theta) = \frac{4\pi G\Omega_0}{3c^2}\frac{3H_0^2c^2}{8\pi G}\frac{(1-\cos\theta)}{H_0^2(\Omega_0 - 1)} = \frac{\Omega_0(1-\cos\theta)}{2(\Omega_0 - 1)}$$

$$\boxed{a(\theta) = \frac{\Omega_0(1-\cos\theta)}{2(\Omega_0 - 1)}}$$

Fazendo a mesma coisa para $t(\theta)$ obtemos:

$$t(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3c^2}\frac{(\theta - \sin\theta)}{(kc^2)^{3/2}} = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3c^2H_0^3(\Omega_0 - 1)^{3/2}}(\theta - \sin\theta)$$

Substituindo ε_0,

$$t(\theta) = \frac{4\pi G\Omega_0}{3c^2H_0^3(\Omega_0 - 1)^{3/2}}(\theta - \sin\theta)\frac{3H_0^2c^2}{8\pi G}$$

$$\boxed{t(\theta) = \frac{\Omega_0(\theta - \sin\theta)}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}}$$

b) Atualmente, $a(\theta) = 1$, assim,

$$2(\Omega_0 - 1) = \Omega_0(1 - \cos\theta) \rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{2(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0} = -0,5$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3}$$

Substituindo esse valor na expressão do tempo,

$$t\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{0,4728}{H_0} \ , \ \ t\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1,9456}{H_0}$$

Porém, o nosso problema não admite essas duas soluções, uma vez que em um universo fecahdo o mesmo expande até um determinado tamanho e após isso começa a contrair, porém, como $H_0 > 0$, o universo está atualmente expandindo, o que nos leva a crer que a idade atual do universo é o menor valor entre os dois, assim, a idade do universo é dada por

$$\boxed{t\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 6,9 \text{ bilhões de anos}}$$

c) Substituindo $a = 1/3$ e fazendo o mesmo processo que no item anterior,

$$\frac{1}{3} = \frac{\Omega_0(1 - \cos\theta)}{2(\Omega - 1)}$$

Resolvendo para θ, obtemos $\theta = \pi/3$ ou $5\pi/3$. Como o tempo de Lookback representa um tempo passado, θ precisa ser menor do que $2\pi/3$ (que representa o ponto atual). Desse modo, $\theta = \pi/3$. Substituindo na fórmula do tmepo,

$$t(\pi/3) = \frac{0,0697}{H_0} \approx 1,03 \text{ bilhões de anos}$$

Assim, $\boxed{\Delta t_L = t(2\pi/3) - t(\pi/3) = 5,87 \text{ bilhões de anos.}}$

d) Pela definição de H, temos, $H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$. Usando a regra da cadeita,

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{d\theta}\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^{-1}$$

Derivando separadamente,

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{\Omega_0(1 - \cos\theta)}{2(\Omega_0 - 1)} = \frac{\Omega_0 \sin\theta}{2(\Omega_0 - 1)}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{\Omega_0(\theta - \sin\theta)}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} = \frac{\Omega_0(1 - \cos\theta)}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

Agora, substituindo na expressão de H,

$$H = \frac{2(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0(1-\cos\theta)} \frac{\Omega_0 \sin\theta}{2(\Omega_0 - 1)} \frac{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}{\Omega_0(1-\cos\theta)}$$

$$H = \frac{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}\sin\theta}{\Omega_0(1-\cos\theta)^2}$$

Para $H = 0$, temos que $\sin\theta = 0$, mas $\cos\theta \neq 1$. Nessas condições, o único valor que atende é $\boxed{\theta = \pi}$. Substituindo na equação para o tempo,

$$\boxed{t(\pi) = \frac{\pi\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} = \frac{1,209}{H_0} \approx 17,86 \text{ bilhões de anos}}$$