Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Mecânica Celeste

[5] **Problema 1.** Iaum e Sevla, dois físicos renomados, pretendem lançar uma sonda espacial para explorar os limites da física newtoniana e as correções relativísticas necessárias nas proximidades de um buraco negro. Eles precisam da sua ajuda para estudar o *Potencial Efetivo* de tal corpo.

a) A energia de um corpo de massa m orbitando um corpo massivo de massa M pode ser escrita como:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r)$$

Onde $\dot{r}$ é a velocidade radial do corpo. Encontre $V_{eff}(r)$ em função de G, M, L, m e r.

b) Segundo a física newtoniana, qual é o menor raio no qual é possível um corpo possuir uma órbita circular em torno de um buraco negro?

c) Qual é a frequência de pequenas oscilações radiais, ω_r, em torno desse raio?

O potencial gravitacional próximo a esses corpos precisa sofrer uma correção relativística e tem a forma:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}$$

d) Explique por que essa correção permite que uma partícula caia no centro de um buraco negro, $r = 0$, e por que isso é impossível na física newtoniana.

e) Qual é o menor valor de L para que uma partícula possa orbitar o buraco negro em uma órbita circular? Qual é o valor do raio nessa condição?

f) Assumindo $\lim_{L\to\infty}$, encontre a menor distância que uma partícula em órbita aberta pode se aproximar de um buraco negro.

[3] **Problema 2.** Um ponto importante no estudo de órbitas é o que acontece quando o potencial segue algo incomum. O objetivo desta questão é estudar esse fenômeno. Considere o momento angular L e a massa do corpo m.

a) Para uma órbita geral, que possui um potencial $V(r)$ na forma ψr^k, encontre o valor r_0 de uma órbita circular para esse potencial.

b) Encontre a frequência de pequenas oscilações, ω_r, em torno desse raio.

c) Seja ω_θ a frequência angular da órbita, encontre o valor da razão $\frac{\omega_r}{\omega_\theta}$. Uma órbita só pode ser fechada se essa razão for um número inteiro. Por quê? Encontre valores de k para que a órbita seja fechada.

[4] **Problema 3.** O Hodógrafo é uma das maneiras menos conhecidas de resolver questões de mecânica celeste. Ao usar esse mecanismo, é possível resolver questões complexas (envolvendo encontrar parâmetros orbitais, parâmetros de velocidade e como minimizar a excentricidade de uma órbita, por exemplo). Apesar de o Hodógrafo possuir diversas utilidades, o objetivo deste exercício é provar o Teorema do Hodógrafo, que diz que, em órbitas fechadas, a velocidade forma um círculo no espaço vetorial. Vamos provar esse teorema de duas maneiras.

Método 1)

I. Partindo da Segunda Lei de Newton e da conservação do momento angular, encontre uma expressão para $d\mathbf{v}/d\theta$. Deixe sua resposta em função do momento angular por unidade de massa, h, e $\mu = GM$.

II. Onde o centro desse círculo está localizado? Considerando o corpo central na origem do sistema, determine uma expressão para a distância entre o corpo central e o centro do Hodógrafo.

Método 2)

O método 2 utiliza noções de cálculo mais avançadas e parte da conservação do *vetor de Laplace-Runge-Lenz*, $\mathbf{A}$.

I. O vetor $\mathbf{A}$ é dado pela expressão:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - GMm^2\hat{\mathbf{r}}$$

O primeiro passo para a demonstração é provar que $\mathbf{A}$ é constante. Para isso, derive o mesmo em relação ao tempo e tire suas próprias conclusões.

II. Como o vetor $\mathbf{L}$ é constante, $\mathbf{A} \times \mathbf{L}$ também é uma constante. Utilizando a identidade vetorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, prove que $\mathbf{v}$ forma um círculo no espaço vetorial.

[2] **Problema 4.** Um dos fenômenos mais fascinantes do sistema solar são as estrelas de nêutrons. Esses são corpos muito pequenos, super densos e que giram muito rápido. Nesta questão, vamos fazer um modelo teórico para essas estrelas.

a) O Pulsar da Vela, uma estrela de nêutrons localizada na constelação da Vela, possui uma frequência de 11Hz, ou seja, ela gira em torno de si mesma 11 vezes por segundo, raio equatorial $R_e = 9{,}6$ km e massa $M = 1{,}88M_\odot$. Sabendo disso, calcule a razão entre seu raio equatorial e seu raio polar.

b) Qual é o menor período de rotação que o Pulsar da Vela pode ter para que ele não se despedace?

c) Atualmente, a taxa de variação do período do Pulsar da Vela é $\frac{\Delta P}{\Delta t} = 1{,}25 \cdot 10^{-13}$s/s. Isso faz com que o Pulsar libere uma quantidade absurda de energia. A temperatura superficial do Pulsar é de $T \sim 10^6$ K. Calcule a ordem de grandeza da razão entre a potência emitida pelo aumento do período e a potência emitida pela Lei de Stefan-Boltzmann.

[3] **Problema 5.** (Adaptado PPP) Geométrio, Paulinho e Hirata adoram chocolate. Certo dia, ambos estavam explorando uma galáxia quando se depararam com uma bola gigante de chocolate. Os três rapidamente começaram a comer a bola, primeiro fazendo uma linha reta do ponto P até o centro da bola em O (esquema 1). Após isso, Hirata cai, colidindo no ponto O, sem frear no caminho. Surpreendentemente, ele continua vivo e é resgatado por Geométrio e Paulinho. Após isso, famintos, eles continuam a comer a esfera gigante de chocolate e deixam um buraco esférico de diâmetro $\overline{PO}$ (esquema 2). Hirata é muito desastrado e acaba caindo de novo, partindo do ponto P e indo até O novamente.

a) Encontre a razão entre as velocidades de impacto de Hirata nos casos 1 e 2.

b) Encontre a razão entre os tempos de queda de Hirata nos casos 1 e 2.

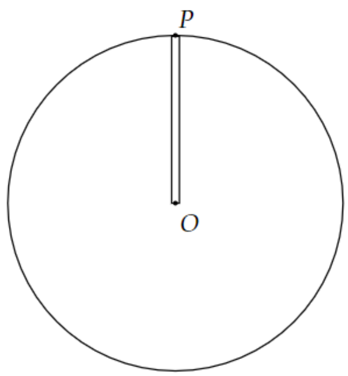

Figura 1: Esquema 1

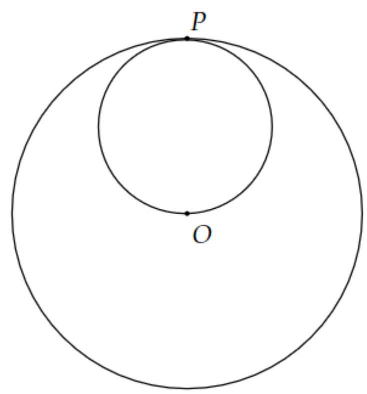

Figura 1: Esquema 2

[5] **Problema 6.** Calcular as velocidades de escape em certas situações pode ser mais complicado do que parece. Um exemplo disso é calcular a velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para chegar a determinado local.
Dica: Os problemas a seguir exigem que você pense cuidadosamente no referencial mais adequado. Não subestime a questão.
Dados: Um corpo pode orbitar a superfície da Terra com velocidade $v_0 = 7,9$ km/s, a velocidade orbital da Terra em torno do Sol é $u_0 = 29,7$ km/s, e o raio da Terra é desprezível em relação à distância Terra-Sol. Considere também que, ao deixar o campo gravitacional da Terra, a distância entre a sonda e o Sol é a mesma distância entre a Terra e o Sol.

a) Qual é a menor velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para atingir o Sol, considerando que ele dê apenas um impulso? (Para conferir, $v = 31,8$ km/s)

b) Qual é a menor velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para escapar do Sistema Solar? (Para conferir, $v = 16,7$ km/s)

c) Como a resposta do item **a)** muda se o foguete conseguir realizar um segundo impulso muito pequeno em algum ponto de sua órbita?

[3] **Problema 7.** (Kevin Zhou) A equação dos foguetes é dada por:

$$v = u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right)$$

Onde v é a velocidade do foguete, u a velocidade relativa com que o foguete ejeta combustível, M_0 a massa inicial do foguete e M sua massa atual.

a) Deduza a equação dos foguetes partindo da conservação do momento.

b) Considerando u um valor fixo durante todo o percurso do foguete, qual deve ser o valor de u para que o foguete vá de 0 até v gastando o menor combustível possível? (Você precisará resolver numericamente para v/u)

c) Como a equação dos foguetes deve ser corrigida para uma região do espaço com um campo gravitacional, $\mathbf{g}$, constante e apontando na direção contrária ao movimento do foguete? Considere $\eta = dm/dt =$ constante.

[4] **Problema 8.** Um dos propelentes mais comuns em foguetes é uma mistura de hidrogênio líquido com oxigênio líquido. Quando começa a queimar, a seguinte reação química ocorre:

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

Para cada mol de hidrogênio, esta reação libera $241,8$ kJ de energia. Ao longo da questão, suponha que toda essa energia seja utilizada para mover o foguete.

a) Uma expedição espacial deseja ser feita de tal maneira que é necessário realizar uma transferência de Hohmann para lançar um foguete da Terra para Marte. Calcule a variação de velocidade total Δv necessária para realizar essa manobra.

b) A partir do Δv calculado anteriormente, estime quantas toneladas de propelente devem ser utilizadas para realizar tal manobra para um foguete que ejeta propelente com velocidade $u = 3,0$ km/s e carcaça com massa $M = 140 \cdot 10^3$ kg.

[3] **Problema 9.** Marisso estava estudando um sistema binário com inclinação i. Ele conseguiu descobrir que o maior redshift vindo da estrela 1 era z_1. Sabendo disso, ache uma expressão para a massa da estrela 2, m_2, deixe sua resposta em função de z_1, do período do binário P, da inclinação i, da razão entre as massas $\lambda = m_2/m_1$ e de constantes fundamentais. Considere as órbitas circulares.

[2] **Problema 10.** Qual é a razão entre a) as forças gravitacionais causadas pelo Sol e pela Lua na superfície da Terra? E b) das forças de maré causadas pelo mesmo?

[4] **Problema 11.** (Morin 7.7) Uma partícula de massa m viaja em uma órbita hiperbólica com uma massa M fixa em um dos focos. A velocidade no infinito é v_0 e o parâmetro de impacto é b.

a) Mostre que o ângulo de desvio da partícula é dado por:

$$\phi = \pi - 2\tan^{-1}(\gamma b)$$

Onde $\gamma \equiv v_0^2/GM$.

b) Sendo $d\sigma$ a seção transversal da partícula (medida quando a mesma se encontra no infinito) que é defletida em um ângulo sólido de tamanho $d\Omega$. Mostre que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\gamma^2 \sin^4(\phi/2)}$$

A título de curiosidade, essa quantidade é chamada de *seção transversal diferencial.*

Ideia 1

Em certas questões, é válida a utilização de vetores. Um exemplo é a questão abaixo. Para facilitar, na parte de encontrar a inclinação da órbita, observe a seguinte imagem:

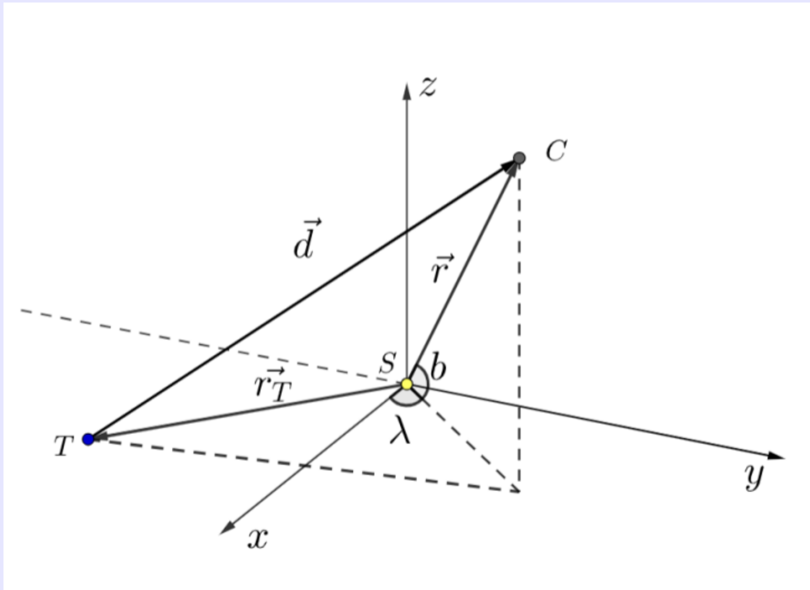

Figura 2: Vetores

Aqui, C representa um corpo, T a Terra e S o Sol. Os ângulos λ e b denotam, respectivamente, a longitude e a latitude eclíptica. $\vec{r}$ é o vetor entre o Sol e o corpo, $\vec{r}_T$ o vetor entre o Sol e a Terra, e $\vec{d}$ o vetor entre a Terra e o corpo. Pela figura,

$$\vec{r} = r(\cos b \cos \lambda \hat{x} + \cos b \sin \lambda \hat{y} + \sin b \hat{z})$$

$$\vec{r}_T = r_T(\cos(\omega_{\oplus} t)\hat{x} + \sin(\omega_{\oplus} t)\hat{y})$$

Assim, $\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}_T$:

$$\vec{d} = \big(r \cos b \cos \lambda - r_T \cos(\omega_{\oplus} t)\big)\hat{x} + \big(r \cos b \sin \lambda - r_T \sin(\omega_{\oplus} t)\big)\hat{y} + r \sin b \, \hat{z}$$

Calculando o módulo do vetor $\vec{d}$, obtemos que:

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{r_T^2 + r^2 - 2r_T r \cos b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t)}$$

Portanto:

$$\boxed{\cos b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t) = \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2 r_T r}}$$

[5] **Problema 12.** (Lista 1 - Vinhedo 2024) CR4b-2023 é uma sonda em órbita heliocêntrica que foi construída e lançada em 2023 pelo jovem prodígio Caranguejo. O objetivo da sonda era estudar as tempestades solares e captar dados para que Caranguejo analisasse em seu observatório no Espírito

Santo. CR4b-2023, porém, durante uma de suas expedições ao Sol, foi atingida por uma tempestade solar e sofreu uma danificação grave. Devido a isso, a sonda se desorientou e, assim, teve todos os seus parâmetros orbitais alterados, de maneira que Caranguejo não soubesse mais sua localização.

Visando rastrear a posição de CR4b-2023 novamente, Caranguejo utilizou-se de seu observatório para coletar os valores das separações angulares $\Delta\phi$ entre a sonda e o Sol e os valores do diâmetro angular θ_S da sonda, tudo em função do tempo t. A tabela obtida por Caranguejo pode ser vista abaixo.

$\Delta\phi$ (Graus)	θ_S (mas)	t (Dias)
0,000	99,27	0,00
4,889	103,67	1,79
17,354	104,72	7,43
29,015	93,06	20,62
27,793	81,18	25,41
13,460	79,77	45,98
11,539	77,97	51,61
2,466	76,44	54,53
2,656	74,84	55,31
7,177	73,90	57,19
10,800	70,63	58,43
22,464	72,92	91,67
13,823	80,50	130,48

Tabela 1: Valores medidos por Caranguejo

Considere que, no momento inicial $t_0 = 0$ em que a sonda é atingida pela tempestade solar, o Sol estava exatamente no ponto de Libra e o movimento da sonda era ascendente em relação ao plano da eclíptica. Além disso, considere que o raio da sonda, supostamente esférica, é dado por $R = 30$ km. Para essa questão, não é necessário fazer análise de erros (apesar de ser importante tentar utilizar métodos visando diminuir erros estatísticos). Com base no que foi apresentado:

(a) Calcule os parâmetros orbitais da órbita de CR4b-2023, ou seja, seu semi-eixo maior a, excentricidade e, inclinação i, longitude do nodo ascendente Ω e argumento do periélio ω. Como em todas as questões de análise de dados, você deve fornecer tabelas de dados claramente rotuladas, gráficos claramente rotulados e derivações de fórmulas suficientes para deixar claro o que você mediu e como está derivando seus resultados visando reduzir erros estatísticos.

(b) Considerando (x', y', z') como as coordenadas de CR4b-2023 em um sistema cartesiano de mão direita em que o plano $x'y'$ se localiza no plano da órbita da sonda, o Sol se localiza na origem, e o eixo x' aponta para o ponto vernal, escreva, em uma tabela, os valores de pelo menos 5 pontos (x', y', z') distintos. Com base nos dados encontrados, esboce, em um gráfico, a órbita de CR4b-2023, indicando as coordenadas de seu centro.

(c) Considerando agora um novo sistema de coordenadas de mão direita (x, y, z), no qual o Sol se localiza na origem, o plano xy representa o plano da eclíptica, e o eixo x aponta para o ponto vernal, escreva as coordenadas do centro da órbita de CR4b-2023. Por fim, calcule a distância d_{TC} entre o centro da órbita terrestre e o centro da órbita da sonda.

[5] **Problema 13.** (Iran Problem Set) Uma partícula de massa m está orbitando um objeto massivo de massa M. Mostre que o impulso necessário para fazer a órbita girar um ângulo η em torno de um dos focos é dado por:

$$\Delta v = \frac{2\mu e}{h} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right),$$

onde:

- h é o momento angular por unidade de massa;
- $\mu = GM$, sendo G a constante gravitacional.

[3] **Problema 14.** Nessa questão, vamos estudar um modelo simplificado para o efeito que confirmou a Teoria da Relatividade Geral de Einstein: as lentes gravitacionais. A presença de um corpo massivo curva o espaço-tempo, fazendo com que estrelas possam servir como lentes no espaço. Alguns telescópios, como o JWST, utilizam esse efeito para conseguir fotografar aglomerados de galáxias muito distantes. Uma das fotos tiradas pelo JWST de uma lente gravitacional pode ser vista a seguir:

Figura 3: Fonte: National Geographic

Um esquema simplificado das lentes gravitacionais pode ser observado a seguir. Esse "círculo"é conhecido como Anel de Einstein.

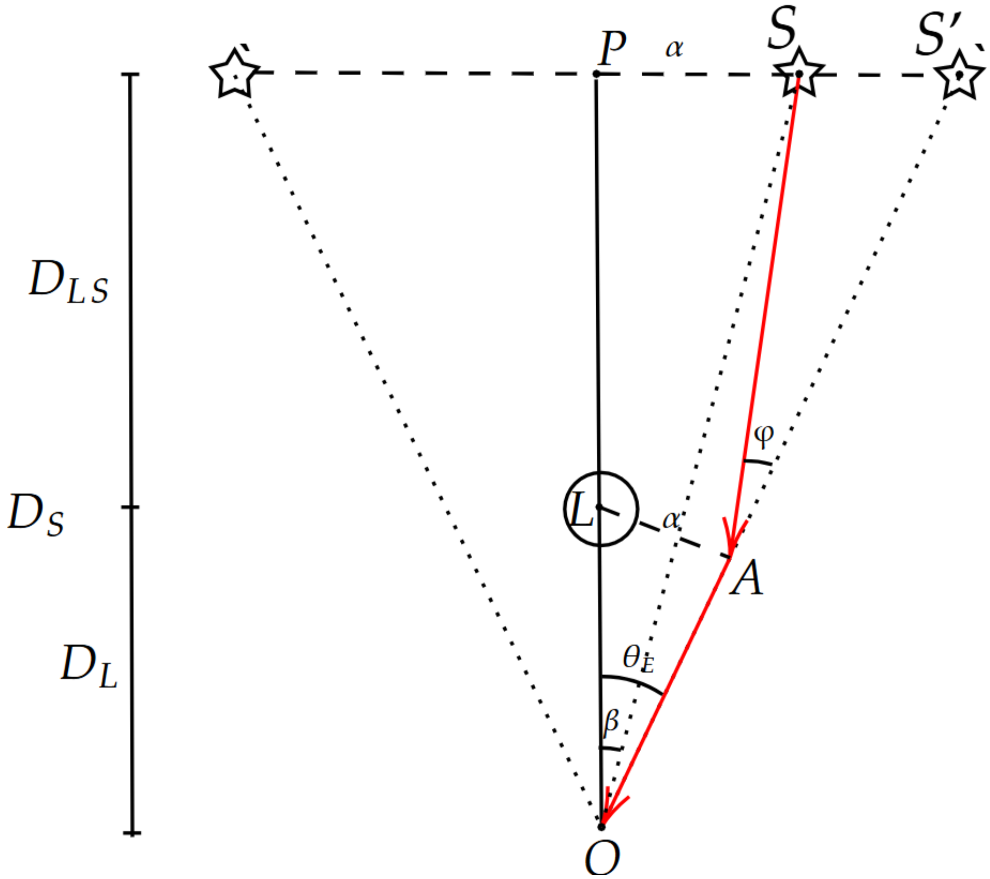

Figura 4: Esquema da lente gravitacional

No esquema, o ponto O representa o observador, L o corpo massivo que atua como uma lente, S a posição real do objeto observado e S' sua posição aparente, α é o parâmetro de impacto, β a separação angular entre o corpo observado e a lente, θ_E o raio angular do anel de Einstein, φ o desvio angular causado por um corpo massivo. A distância $\overline{OL}$ vale D_L e a distância $\overline{OP}$ vale D_S, de modo que $D_S - D_L = D_{LS}$.

Todos os ângulos são muito pequenos, de modo que $\sin x \approx \tan x \approx x$. Além disso, por estarem no infinito, as retas $\overline{OP}$, $\overline{OS}$ e $\overline{OS'}$ podem ser aproximadas como paralelas.

É um resultado conhecido da Teoria da Relatividade Geral que o desvio da luz causado por um corpo massivo é dado por:

$$\varphi = \frac{4GM}{\alpha c^2}$$

a) No limite em que $\lim_{\alpha \to 0}$, encontre uma expressão para θ_E em função das demais distâncias e ângulos fornecidos.

b) O telescópio JWST obtém imagens no infravermelho, de comprimento de onda λ_{IV}. Quão grande deve ser seu diâmetro para que ele possa resolver um anel de Einstein?

[4] **Problema 15.** Neste exercício, vamos estudar propriedades da excentricidade das órbitas e entender como ela se relaciona com a energia e o momento angular. Denotando $\mu = GM$ e $h = L/m$, faça o que se pede nos itens a seguir.

Parte I: O vetor excentricidade

a) Escreva uma expressão para a segunda lei de Newton no formato vetorial para um corpo de massa m orbitando um corpo de massa M a uma distância r.

b) Faça o produto vetorial da sua expressão por $\mathbf{h}$ e prove que:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r}\mathbf{v} - \frac{\mu\dot{r}}{r^2}\mathbf{r}$$

Onde $\dot{\mathbf{r}}$ representa a velocidade radial e $\mathbf{v}$ a velocidade.

c) Podemos escrever o lado direito da equação anterior como:

$$\frac{d}{dt}(A\mathbf{r})$$

Encontre o valor de A.

d) Integre os dois lados da igualdade encontrada e faça a multiplicação escalar de ambos os lados por $\mathbf{r}$. Após isso, resolva para r. O seu resultado deve ser bem parecido com o previsto somente pela geometria:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Encontre os valores de p e e. **Não esqueça da constante de integração. Suas respostas podem depender dela.**

e) No item anterior, e é a excentricidade da órbita. Voltando à equação obtida inicialmente no item c, após a integração, ache uma forma de expressar $\mathbf{e}$, como sendo um vetor de módulo e e que aponta diretamente para o corpo orbitado.

f) Prove que a relação encontrada no item anterior pode ser escrita como:

$$\mu\mathbf{e} = (v^2 - \frac{\mu}{r})\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}$$

Para onde esse vetor aponta?

Parte II: Determinando elementos orbitais a partir do vetor excentricidade

Vamos definir o nosso sistema de coordenadas da seguinte maneira. Considere um sistema de mão direita, orientado de tal forma que o plano xy coincida com o plano equatorial e com $\mathbf{z}$ apontando para o polo norte. Definindo o vetor nodal como $\mathbf{n} = \mathbf{z} \times \mathbf{h}$.

a) Encontre uma expressão para $\mathbf{h}$ em função das componentes do vetor $\mathbf{r}$ e do vetor $\mathbf{v}$. Após isso, encontre o vetor $\mathbf{n}$ em função das componentes de $\mathbf{h}$.

b) Desenhe uma esfera celeste e represente nela: o plano do equador e uma órbita qualquer (que tenha inclinação diferente de 0). Nela, marque os seguintes ângulos: i, a inclinação orbital, Ω a longitude do nodo ascendente, ω o argumento do periastro e θ, a anomalia verdadeira.

c) Encontre expressões para todos esses ângulos em função de $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{r}$ e qualquer um dos vetores definidos no nosso sistema de coordenadas xyz.

[5] **Problema 16.** ⋆⋆⋆ (Adaptado IPhO 2018) Um dos efeitos mais interessantes da relatividade geral é a emissão de ondas gravitacionais (OG's) por binárias próximas. Um dos efeitos disso é a perda de energia do sistema. Nesta questão, iremos estudar esse efeito a fundo.

a) Considere um sistema formado pelas estrelas 1 e 2, com massas M_i e distando r_i do centro de massa. Utilizando a segunda lei de Newton, é possível demonstrar que:

$$\mathbf{a_1} = -\alpha \frac{\mathbf{r_1}}{r_1^n}$$

Onde $\mathbf{a_1}$ é o vetor aceleração da estrela 1. Encontre o valor de $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ (lê-se α em função de G, M_1, M_2) e de n.

b) A energia total do sistema binário pode ser expressa como:

$$E = A(\omega, \mu, L) - \frac{GM\mu}{L}$$

Onde μ é a massa reduzida do sistema, $M = M_1 + M_2$ e $L = r_1 + r_2$. Encontre o valor de A.

c) A expressão anterior pode ser simplificada para:

$$E = \frac{\beta G M \mu}{L}$$

Onde β é uma constante adimensional. Encontre seu valor.

A teoria correta da gravidade, a Relatividade Geral, foi formulada por Einstein em 1915 e prevê que a gravidade se propaga à velocidade da luz. Os mensageiros que carregam informações sobre a interação são chamados de ondas gravitacionais (OGs). OGs são emitidas sempre que massas são aceleradas, fazendo com que o sistema de massas perca energia.

Considere um sistema de duas partículas pontuais, isoladas do restante do Universo. Einstein provou que, para velocidades suficientemente pequenas, as ondas emitidas: 1) têm uma frequência que é duas vezes maior do que a frequência orbital; 2) podem ser caracterizadas por uma luminosidade, ou seja, um poder emitido $\mathcal{P}$, que é dominado pela fórmula:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right).$$

Aqui, c é a velocidade da luz $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s. Para um sistema de duas partículas pontuais orbitando no plano $x - y$, Q_{ij} é a seguinte tabela (i, j indicam o número da linha/coluna):

Os componentes de Q_{ij} são dados por:

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2x_A^2 - y_A^2 \right),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2y_A^2 - x_A^2 \right),$$

$$Q_{33} = -\sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3}\left(x_A^2 + y_A^2\right),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^{2} M_A x_A y_A.$$

E $Q_{i,j} = 0$ para todas as outras possibilidades. Aqui, x_A, y_A são as posições da estrela A, com $A = 1,\ 2$ em um plano cartesiano com o centro de massa na origem.

d) Escreva as coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em função de r_1, r_2, ω e t, com t sendo o tempo percorrido desde algum ponto específico da órbita.

e) Para calcular a potência dissipada, a fórmula possui uma soma quádrupla. Resolver essa expressão "na tora"é algo bem complicado e demorado. Porém, felizmente, há um jeito mais bonito e elegante de resolvê-la. Para isso, comece escrevendo $Q_{i,j}$ como uma matriz 3x3, da seguinte forma:

$$Q = A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Encontre o coeficiente $A = A(\mu, L)$ e complete a matriz Q.

f) Do item anterior, você deve obter:

$$Q_{ii} = A(b_i + j_i \cos(kt)), \quad Q_{ij}^{i \neq j} = A(p_{ij} \sin(kt))$$

Encontre os valores de b_i, j_i, p_{ij} e k.

g) Agora, você é capaz de resolver para $\mathcal{P}$ de maneira mais fluida. A expressão pode ser simplificada para:

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \omega^6$$

Encontre o valor numérico de ξ.

DICA: O somatório duplo:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(A_{ij})(A_{ij})$$

Onde A é uma matriz $N \times N$ pode ser simplificado para:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^2$$

Que representa a soma quadrática de todos os elementos da matriz A.

h) Caso não houvesse a emissão de OG's, o sistema continuaria em equilíbrio indeterminadamente, mas devido à sua emissão, a energia do sistema não é conservada, fazendo com que haja uma variação na velocidade angular do sistema, ω. A fórmula para a variação temporal de ω tem a seguinte cara:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} (GM_C)^5$$

Onde M_c é a chamada Massa *Chirp* e $M_c = M_c(M, \mu)$. Encontre uma fórmula para M_c.

i) Usando as informações obtidas acima, relacione a velocidade angular orbital ω com a frequência das ondas gravitacionais f_{OG}. Sabendo que, para qualquer função suave $F(t)$ e $a \neq 1$:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \implies F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t_0 - t),$$

onde χ é uma constante e t_0 é uma constante de integração, mostre que a equação do item anterior implica que a frequência das ondas gravitacionais é:

$$f_{\mathrm{OG}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p},$$

e determine a constante p.

Em 14 de setembro de 2015, o evento GW150914 foi registrado pelos detectores LIGO, consistindo de dois braços em forma de L, cada um com 4 km de comprimento. Esses braços mudaram de comprimento relativo de acordo com a Figura abaixo. Os braços do detector respondem linearmente a uma onda gravitacional que passa, e o padrão de resposta imita a onda. Essa onda foi criada por dois buracos negros em órbitas quase circulares; a perda de energia por radiação gravitacional causou a contração da órbita e, eventualmente, a colisão dos buracos negros. O ponto de colisão corresponde, aproximadamente, ao pico do sinal após o ponto D, na Figura abaixo.

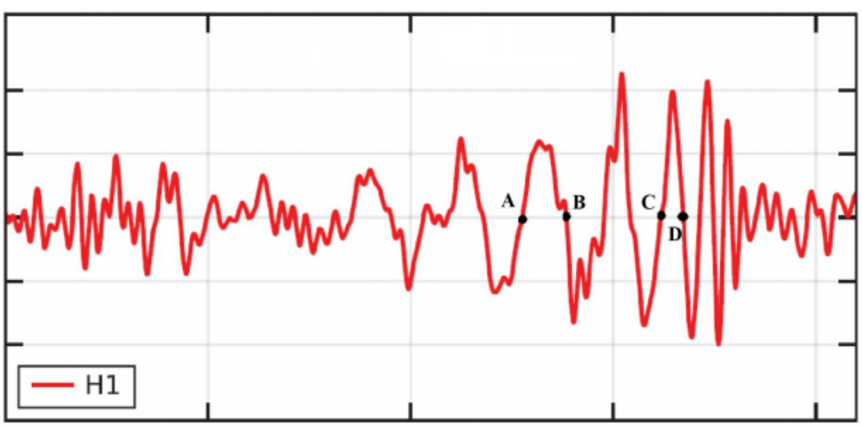

Figura 5: Deformação, ou seja, variação relativa do tamanho de cada braço, no detector LIGO H1. O eixo horizontal representa o tempo, e os pontos A, B, C, D correspondem a $t = 0,000$, $0,009$, $0,034$, $0,040$ segundos, respectivamente.

j) A partir da figura, estime $f_{OG}(t)$ em:

$$t_{AB} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{e} \quad t_{CD} = \frac{t_D + t_C}{2}.$$

Assumindo que a equação para f_{OG} é válida até a colisão (o que, estritamente falando, não é verdade) e que os dois objetos possuem massas iguais, estime a massa "chirp", M_c, e a massa total do sistema, em termos de massas solares $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}\,\text{kg}$.

k) Estime a separação orbital mínima entre os dois objetos em t_{CD}. Assim, estime um tamanho máximo para cada objeto, $R_{\max}$. Obtenha $\frac{R_\odot}{R_{\max}}$ para comparar esse tamanho com o raio do nosso Sol, $R_\odot \simeq 7 \times 10^5\,\text{km}$. Estime também sua velocidade orbital linear no mesmo instante, v_{col}, comparando-a com a velocidade da luz, $\frac{v_{\text{col}}}{c}$.

[3] **Problema 17.** (Barra 2024) Durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, Hugo observava a estrela Plo I com seu telescópio. Comparando o seu espectro com o de outras estrelas, ele descobre que Plo I é uma estrela de nêutrons e estima sua massa como sendo $M_1 = 2M_\odot$. Ele também observa que Plo I possui variações senoidais em sua velocidade radial ao longo do tempo e conclui que Plo I deve fazer parte de um sistema binário com outro corpo celeste, Plo II. Observando a curva de velocidade de Plo I, Hugo também determina que Plo I possui uma órbita circular de período P e velocidade radial máxima K. Porém, ele não sabe qual é a massa M_2 de Plo II e nem qual é a inclinação i do plano orbital do binário em relação ao plano do céu, representada na figura a seguir.

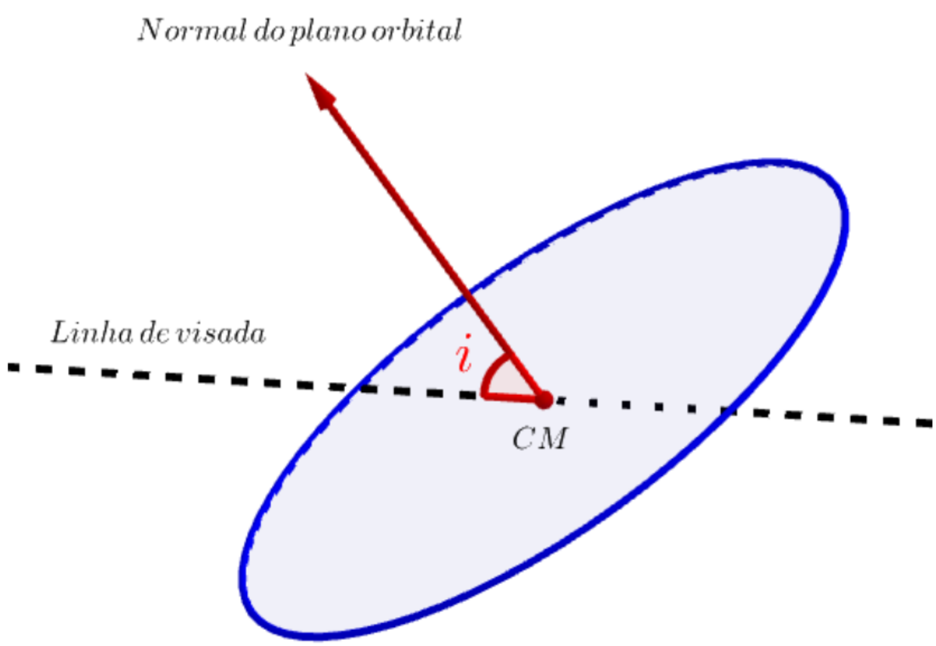

Figura 6: Representação da órbita

a) A partir da 3ª lei de Kepler e da 2ª lei de Newton, encontre uma expressão para a **função de massa** do sistema binário formado por Plo I e Plo II em termos de P, K e constantes universais. Você pode utilizar que a função de massa é dada por:

$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$

b) Utilizando suas medidas, Hugo calcula que a função de massa do binário é $f = 46,2M_\odot$. Desejamos encontrar o valor mínimo $M_{2,\text{min}}$ para a massa de Plo II, sabendo que ele corresponde ao caso em que $i = 90°$. Suponha $M_{2,\text{min}} > M_1$. A partir disso, determine $M_{2,\text{min}}$. Seu resultado é condizente com a hipótese? Responda SIM ou NÃO, justificando com cálculos.

c) Com base em sua resposta do item anterior, conclua: é mais provável que Plo II seja um exoplaneta, uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro?

[3] **Problema 18.** Juventino está localizado na sua base (não tão) secreta no Polo Norte terrestere. Após uma chama de emergencia de deduardo letodo, o mesmo precisa mandar um missél para o equador, afim de explodir a base de seu arqui inimigo: Raposo.

a) Junvetino não está na sua melhor forma, e com toda a sua força, ele só consegue arremessar o foguete na primeira velocidade cósmica (a velocidade orbital para corpos próximos da superfície terrestre). Nessas condições, qual é o semi eixo da órbita do foguete lançado por Juventino?

b) Qual a maior altura que o foguete chega?

c) Qual o intervalo de tempo entre o Juventino lançar o foguete e a base de Raposo ser explodida?

[5] **Problema 19.** Nesse problema, nosso objetivo será calcular o período de precessão da Terra. Para isso, vamos considerar a Terra como um elipsoide, com raio polar R_p, raio equatiorial R_e, com período de rotação em torno do eixo polar $T = 23^h 56^m 4^s$ e massa $M_\oplus$ uniformemente distribuida. Para o nosso modelo, considere que apenas o Sol e a Lua exercem forças gravitacionais relevantes para o problema.

a) Considerando que $R_p = R_\oplus$, qual o valor numérico de R_e?

b) O momento de inercía de um corpo, pode ser calculado por $I = \int r^2 dm$. Sabendo disso, calcule o momento de inercia no eixo x e no eixo y de um elipsoide dado pela equação

$$\frac{x^2}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_p^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1$$

Com os momentos de inercia calculados, para a Terra, vamos definir o eixo x como o eixo que contem o equador e o eixo y como aquele que contem os polos. Calcule a quantidade,

$$\frac{I_p}{(I_p - I_e)}$$

Onde I_p é o momento de inercia polar (no eixo y) e I_e o momento de inceria equatorial (no eixo y)

c) Encontre uma expressão para o exercicios pelo sistema Sol-Lua na Terra. (Dica, devido a simetria, muitos termos dentro de integrais irão zerar e o torque final terá componente em apenas uma direção no sistema de coordenadas definidos anteriormente)

d) Por fim, utilizando a equação,

$$\tau = \Omega \times \mathbf{L}$$

Onde $\mathbf{L}$ é o momento angular e Ω é a frequencia de precessão, encontre o período de precessão da Terra.