Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Óptica e Telescópios

[3] **Problema 1.** Um telescópio Kepleriano possuí duas lentes convergentes. A primeira possuí o raio de curavtura das duas faces igual a $R = 2$ m e a segunda possuí ambos os raios de curvatura igual a $r = 0,5$ m. Considerando que ambas as lentes possuem espessura desprezivel e são feitas de um material com indíce de refração $n = 1,4$. Calcule o diâmetro e o aumento do telescópio sabendo que este telescópio é um f/12.

Solução

O Foco do telescópio será a soma dos focos individuais de cada lente. Utilizando a equação dos fabricantes de lentes,

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Sejam a e b as lentes da objetiva e da ocular, reespectivamente, obtemos,

$$f_a = 2,50 \text{ m} \; ; \; f_b = 0,625 \text{ m}$$

Portanto, o foco do telescópio será,

$$f = f_a + f_b = 3,125 \text{ m}$$

. Usando que o mesmo é $f/12$, obtemos

$$\boxed{D = f/12 = 260 \text{ mm}}$$

[5] **Problema 2.** Nessa questão, vamos nos familiarizar com uma das ferramentas mais poderosas da óptica, a *óptica geométrica.* O objetivo dessa ferramenta é modelar lentes e espelho em forma de matrizes. Isso é muito útil para resolver questões envolvendo associações de diversas lentes e é um método de resolver problemas de óptica geométrica (praticamente) sem usar geometrica. Mas para isso, se atente as seguintes definições na imagem a seguir

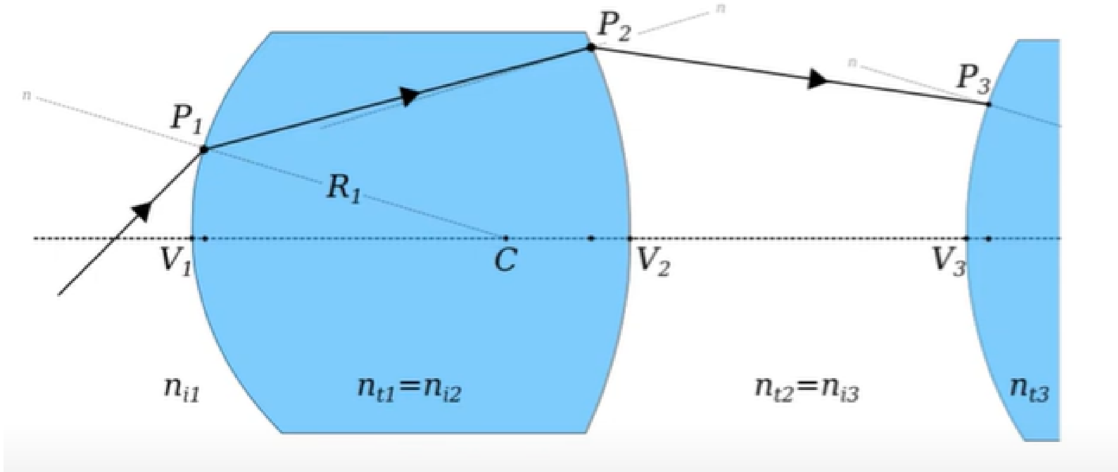

Figura 1: Esquema 1

Todas as linhas pontilhadas são paralelas ao eixo óptico, representado pela seta horizontal. É denotado por P_k o ponto onde a luz passa de um meio para o outro, y_k a coordenda vertical do ponto P_k. São utilizados os subscritos i e t para se referir a incidente e transmitido, reespectivamente, então, por exemplo, $\alpha_{i,k}$ é o ângulo que o raio de incidente luz faz com a horizontal no ponto P_k, já o ângulo α_k é o ângulo entre o ponto P_k e o centro da lente k. Por exemplo, na figura, o ângulo α_1 é repsetenado por $V_1\hat{C}P_1$.

Para essa questão, vamos considerar que todos os ângulos de interesse são pequenos, de modo que $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$.

a) Partindo da Lei de Snell, encontre uma relação entre $n_{i,1}$, $n_{t,1}$, α_1, $\alpha_{i,1}$ e $\alpha_{t,1}$.

b) Encontre uma relação para (1) $n_{t,1}\alpha_{t,1}$ e (2) $y_{t,1}$. Deixe suas respostas em função de $n_{i,1}$, $\alpha_{i,1}$, $y_{i,1}$ e $\mathcal{D}_1$, para

$$\mathcal{D}_1 = \frac{n_{t,1} - n_{i,1}}{R_1}$$

Agora vamos para mais uma definição, seja o vetor $\mathbf{r}_{t,1} = (n_{t,1}\alpha_{t,1},\ y_{t,1})$ e $\mathbf{r}_{i,1} = (n_{i,1}\alpha_{i,1},\ y_{i,1})$.

c) É possível escrever as duas equações que encontramos no item anterior na forma matricial, de forma:

$$\mathbf{r}_{t,1} = \mathcal{R}_1\mathbf{r}_{i,1}$$

Encontre a matriz 2×2 equivalente à $\mathcal{R}_1$.

Nosso interesse agora é encontrar as relações entre os pontos P_2 e P_1.

d) Encontre uma equação para $n_1\alpha_{i,2}$ e $y_{i,2}$. Utilizando o raciocínio do item anterior, deixe sua resposta na forma

$$\mathbf{r}_{i,2} = \Gamma_{2,1}\mathbf{r}_{t,1}$$

Onde $\Gamma_{2,1}$ também é uma matriz 2×2. Deixe sua resposta em função da espessura da lente, $d_{2,1}$.

e) Definimos a matriz da lente, $\mathcal{A}_{2,1}$ da seguinte equação:

$$\mathbf{r}_{t,2} = \mathcal{A}_{2,1}\mathbf{r}_{i,1}$$

De modo que

$$\mathcal{A}_{2,1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Encontre explicitamente $\mathcal{A}_{2,1}$. Isso é de extrema importancia, pois descreve o raio de luz que sai da lente em função do raio que entra.

f) Dentre todas as propriedades da matriz da lente, a mais curiosa delas é que o termo a_{12} é proporcional a $-1/f$ onde f é o foco da lente. Prove esse resultado. (Dica: você consiguira escrever $-a_{12}$ com uma equação bem conhecida da óptica).

Agora, vamos colocar a mão na massa e fazer utilizações praticas da óptica matricial.

g) Considere o seguinte esquema:

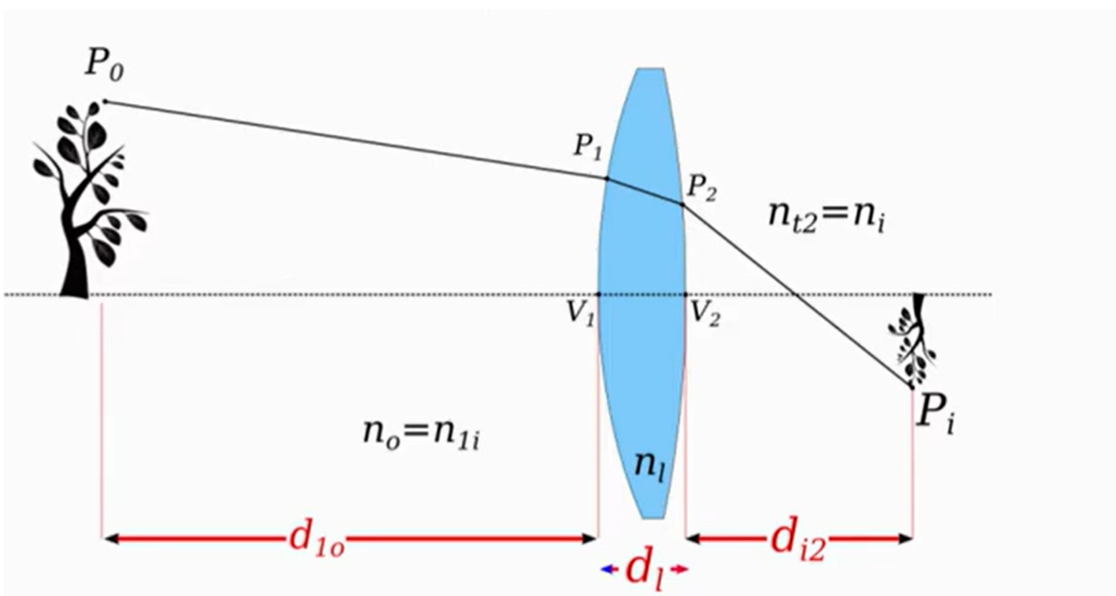

Figura 2: Esquema 2

Ecnontre y_i em função de y_0 e dos dados na imagem.

h) Se a lente estiver entre dois meios diferentes, $n_{i,1} \neq n_{t,2}$ temos a seguinte relação:

$$a_{12} = -\frac{n_{i,1}}{f_0} = -\frac{n_{t,2}}{f_I}$$

Utilizando-se disse, refaça a questão anterior, considerando que entre as duas lentes á água de $n_w = 4/3$.

i) Um arranjo muito comum de lentes é a Objetiva de Tessar, presente em muitas cameras pela sua eficiencia em diminuir efeitos de aberração e astigmatismo. O Arranjo tem a seguinte forma:

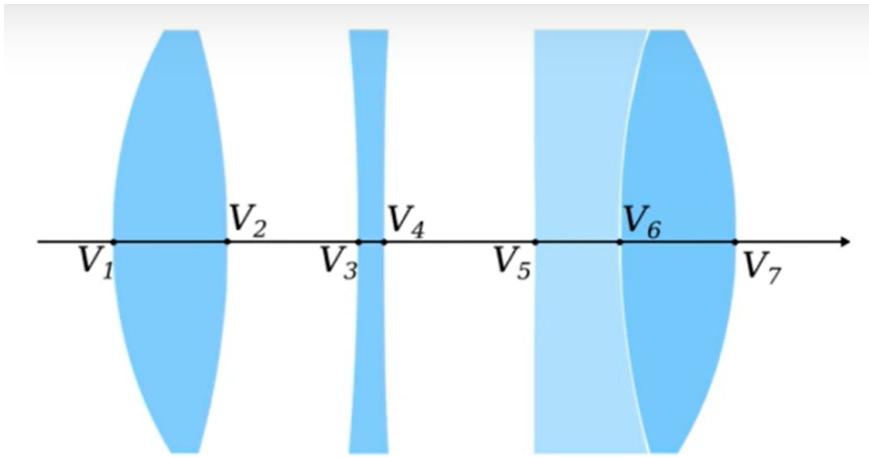

Figura 3: Esquema Objetiva Tessar

Encontre a Matrix da Lente equivalente, $\mathcal{A}_{1,7}$ em função de $\mathcal{R}_i$ e $\Gamma_{i,j}$.

Solução

a) A lei de Snell nos diz que $n_{i,1}\theta_{i,1} = n_{t,1}\theta_{t,1}$. Onde θ são os ângulso que a luz faz com a normal. Note que podemos escrever ambos os ângulos θ como:

$$\theta_{i,1} = \alpha_1 + \alpha_{i,1}, \quad \theta_{t,1} = \alpha_1 + \alpha_{t,1}$$

Logo, a relação que procuramos é

$$\boxed{n_{i,1}(\alpha_1 + \alpha_{i,1}) = n_{t,1}(\alpha_1 + \alpha_{t,1})}$$

b) Substituindo $\alpha_1 = y_1/R_1$, temos

$$n_{i,1}(y_1/R_1 + \alpha_{i,1}) = n_{t,1}(y_1/R_1 + \alpha_{t,1})$$

isolando $n_{t,1}\alpha_{t,1}$

$$n_{t,1}\alpha_{t,1} = n_{i,1}\alpha_{i,1} + \frac{y_1}{R_1}(n_{i,1} - n_{t,1})$$

Em termos de $\mathcal{D}_1$

$$n_{t,1}\alpha_{t,1} = n_{i,1}\alpha_{i,1} - y_1\mathcal{D}_1$$

Note que y não muda imediatamente após a transmissão da luz. Logo $y_1 \equiv y_{i,1} \equiv y_{t,1}$.

c) Na forma matricial

$$\begin{pmatrix} n_{t,1}\alpha_{t,1} \\ y_{t,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{i,1}\alpha_{i,1} \\ y_{i,1} \end{pmatrix}$$

Assim, nossa matriz $\mathcal{R}_1$, também conhecida como matriz refração é dada por:

$$\boxed{\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

d) Primeiro, vamos achar a altura do ponto 2. Seja d_{21} a espessura da lente. Utilizando trigonometria obtemos

$$y_{i,2} = y_{t,1} + \alpha_{t,1} d_{21}$$

Temos que $\alpha_{t,1}$ e $\alpha_{i,2}$ são alternos internos. Ou seja $\alpha_{t,1} = \alpha_{i,2}$. Como o indice de refração dentro da lente é constante ($n_{i,2} = n_{t,1}$), temos $n_{t,1}\alpha_{t,1} = n_{i,2}\alpha_{i,2}$. Colocando as duas expressoões na forma matricial obtemos,

$$\begin{pmatrix} n_{i,2}\alpha_{i,2} \\ y_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d_{2,1}}{n_{t,1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{t,1}\alpha_{t,1} \\ y_{t,1} \end{pmatrix}$$

Portanto, podemos concluir que,

$$\boxed{\Gamma_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d_{2,1}}{n_{t,1}} & 1 \end{pmatrix}}$$

e) Juntando as expressões encontradas anteriormente,

$$\mathbf{r}_{i,2} = \Gamma_{2,1}\mathbf{r}_{t,1}$$

$$\mathbf{r}_{i,2} = \Gamma_{2,1}(\mathcal{R}_1\mathbf{r}_{i,1})$$

E como vimos anteriormente, para irmos de $\mathbf{r}_{i,k}$ para $\mathbf{r}_{t,k}$ basta utilizarmos a matriz $\mathcal{R}_k$, desse modo

$$\mathbf{r}_{t,2} = \mathcal{R}_2\Gamma_{2,1}\mathcal{R}_1\mathbf{r}_{i,2}$$

Logo, a matrix $\mathcal{A}_{2,1}$ é a multiplicação da matriz $\mathcal{R}_2$ pela matriz $\Gamma_{2,1}$ pela matriz $\mathcal{R}_1$. Explicitamente,

$$\mathcal{A}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{D}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d_{2,1}}{n_{t,1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com muita determinação, podemos resulver essa conta, obtendo,

$$\boxed{\mathcal{A}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mathcal{D}_2 d_{2,1}}{n_{t,1}} & -\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 + \frac{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 d_{2,1}}{n_{t,1}} \\ \frac{d_{2,1}}{n_{t,1}} & \frac{\mathcal{D}_1 d_{2,1}}{n_{t,1}} \end{pmatrix}}$$

Trabalhando com o termo $a_{1,2}$, temos,

$$a_{1,2} = -\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 + \frac{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 d_{2,1}}{n_{t,1}}$$

Substituindo $\mathcal{D}_k$, temos,

$$a_{1,2} = -\frac{n_{t,1} - n_{i,1}}{R_1} - \frac{n_{t,2} - n_{i,2}}{R_2} + \frac{(n_{t,1} - n_{i,1})(n_{t,2} - n_{i,2})d_{2,1}}{n_{t,1}R_1R_2}$$

Note que, para a nossa situação, $n_{i,1}$ e $n_{t,2}$ correspondem aos indices de refração do meio, já $n_{t,1}$ e $n_{i,2}$ correspondem aos indices de refração da lente, que serão denotados por n_m e n_l reespectivamente. Dessa maneira,

$$a_{1,2} = -\frac{n_l - n_m}{R_1} - \frac{n_m - n_l}{R_2} + \frac{(n_l - n_m)(n_m - n_l)d_{2,1}}{n_l R_1 R_2}$$

$$a_{1,2} = -(n_l - n_m)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{(n_l - n_m)^2 d_{2,1}}{n_l R_1 R_2}$$

$$a_{1,2} = -(n_l - n_m)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_l - n_m)d_{2,1}}{n_l R_1 R_2}\right)$$

Isso tem formato identico a equação dos fabricantes de lentes (para espessuras não desprezíveis).

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_m} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_l - n_m)d_{2,1}}{n_l R_1 R_2}\right)$$

Assim, podemos concluir que

$$\boxed{a_{1,2} = -\frac{n_m}{f}}$$

[2] **Problema 3.** A teoria ondulatória da luz demonstra que um foco perfeito não é possível devido aos efeitos de difração associados à abertura finita da lente. Essa falta de foco perfeito impede que objetos muito próximos sejam distinguidos. Este problema pode ser estudado de dois pontos de vista diferentes:

A teoria ondulatória da luz prevê que uma lente de diâmetro D não pode focar um feixe paralelo de luz com comprimento de onda λ em um ângulo menor que o limite de difração:

$$\theta_m \approx 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{1}$$

Considere agora uma abordagem quântica, os fótons que são focados pela lente. Esses fótons são conhecidos por terem passado em algum lugar dentro de um raio do centro da lente. A incerteza na posição x está associada a uma incerteza no componente x do momento do fóton. Consequentemente, um fóton que, na ausência dessa incerteza, teria sido trazido para o eixo óptico do plano focal, pode agora ser desviado por um ângulo $\theta \ll 1$.

Considere o comprimento de onda de de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$. Encontre um limite para θ.

DICA: o princípio de incerteza de Heisenberg, relaciona a impressição entre as medidas de momento e posição de uma particula por

$$\Delta p_x \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

Solução

O momento de um fóton é dado por $p = h/\lambda$ e sabemos que o foton possui $\Delta x = D$ utilizando o princípio da incerteza de Heisenberg

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2D}$$

Utilizando que $\theta \approx \frac{\Delta p_x}{p}$, obtemos

$$\boxed{\theta \approx \frac{\lambda \hbar}{2Dh} = \frac{1}{4\pi}\frac{\lambda}{D}}$$

[3] **Problema 4.** (Apostila Magna) Prove que a quantia $n_i R_i \sin\theta_i$ para cascas esféricas adjacentes entre si, em que n_i é o índice de refração da i-ésima casca esférica, θ_i é o ângulo que o raio de luz faz com a normal da i-ésima casca esférica e R_i é o raio da i-ésima casca esférica, é uma invariante

[4] **Problema 5.** O indídice de refração da atmosfera de um planeta é dado por,

$$n(h) = \frac{n_0}{1 + \epsilon h}$$

Onde n_0 e *epsilon* são constantes.

a) Um raio de luz atinge a atmosfera paralelamente a superfície, há uma altura $h' \ll R$, como será a trajetória?

b) Sabendo a trajetória do raio de luz, calcule o Raio do planeta.

Dica: Você pode achar útil a seguinte relação,

$$\int \frac{t}{\sqrt{a - bt^2}} dt = -\frac{1}{b}\sqrt{a - bt^2} + C$$

Solução

a) Defidindo $ds = \sqrt{dx^2 + dh^2}$ como sendo o elemnto infinitesimal de arco, temos,

$$\sin\theta = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\theta = \frac{dh}{ds}$$

Como o meio é contínuo, podemos escrever,

$$n(h)\sin\theta(h) = cte$$

Assim,

$$n\frac{dx}{ds} = K$$

Substituindo n,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{K(1+\epsilon h)}{n_0}$$

Porém, pela definição de s, temos,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 = 1$$

Substituindo dx/ds,

$$\frac{dh}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{K(1+\epsilon h)}{n_0}\right)^2}$$

Usando uma regra da cadeia,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh/ds}{dx/ds} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{K(1+\epsilon h)}{n_0}\right)^2}}{\frac{K(1+\epsilon h)}{n_0}}$$

Simplficando a expressão,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sqrt{n_0^2 - K^2(1+\epsilon h)^2}}{K(1+\epsilon h)}$$

Para resolver essa E.D.O, vamos criar a variável $u = 1 + \epsilon h$, de modo que,

$$dh = \frac{du}{\epsilon}$$

Assim,

$$\frac{du}{dx} = \epsilon\frac{\sqrt{n_0^2 - K^2u^2}}{Ku}$$

Separando os termos e integrando,

$$\int \frac{u}{\sqrt{n_0^2 - K^2u^2}}du = \frac{\epsilon}{K}\int dx$$

A integral do lado esquerdo, é a mesma fornecida pela questão, assim,

$$-\frac{1}{K^2}\sqrt{n_0^2 - K^2u^2} = \frac{\epsilon}{K}x + C$$

Trabalhando nessa expressão,

$$\sqrt{n_0^2 - K^2u^2} = -\epsilon Kx - K^2C$$

$$n_0^2 - K^2u^2 = (\epsilon Kx + K^2C)^2$$

Substituindo u,

$$n_0^2 - K^2(1+\epsilon h)^2 = \epsilon^2K^2x^2 + 2\epsilon K^3Cx + K^4C^2$$

Rearranjando os termos,

$$\epsilon^2K^2x^2 + 2\epsilon K^3Cx + K^2(1+\epsilon h)^2 = n_0^2 - K^4C^2$$

$$\epsilon^2x^2 + 2\epsilon KCx + (1+\epsilon h)^2 = n_0^2/K^2 - K^2C^2$$

Dividindo por ϵ^2,

$$x^2 + \frac{2KC}{\epsilon}x + \frac{K^2C^2}{\epsilon^2} + \left(h + \frac{1}{\epsilon}\right)^2 = \left(\frac{n_0}{\epsilon K}\right)^2$$

Juntando o produto notável,

$$\boxed{\left(x + \frac{KC}{\epsilon}\right)^2 + \left(h + \frac{1}{\epsilon}\right)^2 = \left(\frac{n_0}{\epsilon K}\right)^2}$$

Que é justamente a equação de um círculo de raio $\frac{n_0}{\epsilon K}$ e centro $C = (-\frac{KC}{\epsilon},\ -\frac{1}{\epsilon})$.

b) No caso de um raio que tangência o planeta, temos que o mesmo possuí $\theta_0 = \pi/2$ e $h_0 = 0$. Assim, utilizando,

$$n(h)\sin\theta(h) = n_0\sin\theta_0 = K$$

Obtemos $K = n_0$, assim, o raio do planeta é dado pelo raio da trajetória (O raio de luz é tangênte a superfície) e, portanto,

$$\boxed{R = \frac{1}{\epsilon}}$$