Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Termodinâmica

[3] **Problema 1.** Uma galáxia possuí na ordem de 10^{10} estrelas, por essa quantidade imensa, podemos modelar uma galáxia como sendo uma núvem de gás ideial, onde cada estrela seria equivamente a uma partícula do Gás.

O objetivo dessa questão é utilizar esse modelo teórico para estudar algumas propriedades de galáxias. Para isso, vamos fazer as seguintes suposições:

i) A galáxia é esférica e se encontra em equilíbrio hidrostático.

ii) A densidade de massa da galáxia é constante e tem valor ρ.

iii) As massas das estrelas são pequenas o suficiente para que as interações interestelares possam ser desconsideradas.

a) Considerando um sistema de gás ideal, encontre uma expressão para a pressão em função da densidade ρ, da temperatura, T, da massa de cada partícula μ e constantes físicas.

b) No nosso modelo teórico, não faz sentido pensar em temperatura, então precisamos encontar um substituto para ela. Utilizando o teorema da equipartição de energia, encontre uma expressão para $T(r)$ e $P(r)$.

[2] **Problema 2.** Nessa questão, vamos fazer um estudo sobre o coeficiente adiabático de estrelas. Considere uma o exterior de uma estrela se dá por vácuo a temperatura $T = 0$.

a) Todas as estrelas são corpos em equilíbrio hidrostático. Sabendo disso, qual a pressão na superfície de uma estrela de massa M e raio R.

b) Considere agora, que a estrela se expanda em δR, como a pressão variaria? Se necessário utilize que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

c) Agora, conclua qual o valor de γ mínimo, γ_{min} a estrela deve ter para se manter gravitacionalmente ligada (assuma que ela se expande de maneira adiabática)?

[4] **Problema 3.** Há vários modelos para a atmosfera do nosso planeta, vamos explorá-los e encontrar os efeitos físicos de cada um.

a) Primeiramente, vamos considerar o modelo isotérmico (T = cte). Considerando que cada partícula de ar possuí massa μ, a atmosfera possuí $P(0) = P_0$, encontre uma fórmula para a pressão em função da altura, $P(h)$.

b) Um modelo mais real da atmosfera é na verdade, adiabática, uma vez que o ar é um péssimo condutor de calor. Considerando que o ar possuí coeficiente de Poisson γ, encontre uma fórma para $P(h)$, no modelo adiabático. Considere que a nivel do mar, a pressão e a temperatura valem $P(0)$ e $T(0)$.

c) Encontre uma expressão para dT/dh para o modelo anterior e estime seu valor. O resultado é condizente com a realidade?

[5] **Problema 4.** Um dos corpos mais fascinantes do universo são Buracos Negros. Nessa questão, vamos estudar um pouco da Termodinâmica relacionada a esses tipos de objeto. Para essa questao utilizaremos unidades naturais, i.e.: $c = G = \hbar = k_B = 1$. Nessa convenção, a massa do buraco negro é descrita pela equação:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dL + \Phi dQ$$

Aqui, os valores se restringem ao horizonte de eventos, ou seja, κ é a aceleração da gravidade no horizonte de eventos, A, sua área, Ω a velocidade angular do buraco negro, L seu momento de inercia, Φ o potencial eletríco e Q a sua carga.

Parte 1: Termodinâmica Básica

a) Um dos conceitos fundamentais da termodinâmica é o conceito de entropia, utilizando seus conhecimentos sobre a mesma, explique bravimente a desigualdade:

$$\oint dS \geq 0$$

b) Dos 3 fatores que regem a massa de um buraco negro($dA,\ dL,\ dQ$), apenas dA segue a mesma de sigulade da entropia, por que isso se verifica sempre verdade?

Para os próximos itens, considere um buraco negro sem spin e sem carga.

c) Bekenstein e Hawking conseguiram provar a chamada *Entropia Bekenstein-Hawking* que relaciona a entropia com a área do Buraco Negro (lembre-se que estamos utilziando unidades naturais, por isso, algumas dimensões podem não fazer sentido). Bekenstein e Hawking descobriram que para um buraco negro $S \equiv \frac{A}{4}$. A equação que nós temos então é:

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi} d\left(\frac{A}{4}\right)$$

Fazendo uma analogia a dM com alguma função de estado, encontre a temperatura do buraco negro em função de κ.

Ainda há um termo importante faltando na fórmula anterior, a Pressão relacioanda a densidade de energia escura, Λ.

d) A pressão devido a energia escura é dada por:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$$

Onde Λ é constante. Isso nos mostra que VdP é nulo, ou seja, pode ser adicionado livrimente a expressão anterior. Com isso podemos concluir que a massa do buraco negro, na verdade se relaciona com outro potencial termodinâmico, qual é ele?

e) Note que o volume, $V = V$ e a entropia, $S = A/4$ não são mais independentes em buracos negros. Assumindo que o horizonde de eventos do buraco negro é uma esfera, encontre uma relação entre S e V. Isso é mais uma prova que a energia intera, $U = U(S, V)$ não é o melhor potencial termodinâmico para trabalharmos.

Parte 2: Ciclo de Carnot Para Buracos Negros

a) O objetivo dessa parte da questão é construir um modelo teórico para um ciclo de Carnot dentro de buracos negros. Mas primerio prove um resultado importante, para buracos negros, adiabaticos e isocóricos devem ser equivalentes para buracos negros.

b) Calcule a capacidade termica a pressão constante de um Buraco negro. Seu resultado deve ser algo bizarro.

c) Use o fato de que $Q = T\Delta S$ ao longo das isotermas, juntamente com os resultados dos resultados anteriores partes, para calcular a eficiência de uma máquina de Carnot de buraco negro e confirmar que você obtenha a eficiência de Carnot. Maravilhe-se com o quão mais rápido esse cálculo é do que o derivação típica da eficiência de Carnot, e observe que você também inadvertidamente também calculou a eficiência do ciclo Stirling.

Caso voce se interesse pelo assunto, há um artigo interessante que fala especificamente sobre o tema de ciclos em buracos negros e pode ser encontrado aqui.

Parte 3: Tempo de Vida e Evaporação de Buracos Negros

a) Como calculado na parte 1, buracos negros possuem uma temperatura. Em decorrencia a isso, eles emitem radiação, como descrita na Lei de Stefan-Boltzmann. Sabendo disso, ache uma relação entre o tempo de vida de um buraco negro e a sua massa M.

[3] **Problema 5.** Considere que um foguete utiliza como combustível um gás ideal diatômico. Seu mecanismo de funcionamento é bem simples: O gás parte de uma camera a temperatura T_1, que possuí área de secção transversal A_1, o gás entao, flui adiabaticamente e é expelido em uma abertura de área A_2, com pressão, P_2 e temperatura $T_2 < T_1$. Considerando que o fluxo é contínuo, determine o empuxo sentido pelo foguete.

[5] **Problema 6.** (Adaptado Iran Problem Set) Este problema visa calcular o ponto de ebulição de líquidos.

As partículas de um líquido movem-se com diferentes velocidades dependendo da temperatura, e algumas dessas partículas podem escapar das forças intermoleculares e da gravidade terrestre (que será negligenciada neste problema), deixando a superfície do líquido. Essas partículas transferem seu momento, criando pressão ao colidirem com o ambiente ao redor. Essa pressão é conhecida como pressão de vapor do líquido. O ponto de ebulição é a temperatura na qual a pressão de vapor iguala-se à pressão atmosférica ao redor do líquido.

a) Usando a distribuição de Maxwell-Boltzmann, encontre uma relação para a velocidade quadrática média v_{rms}.

A distribuição de Maxwell-Boltzmann é:

$$n(v)\,dv = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}\,4\pi v^2 dv \tag{1}$$

A velocidade quadrática média é dada por:

$$v_{\mathrm{rms}}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = \frac{1}{n}\int_0^\infty v^2 n(v)dv \tag{2}$$

b) Suponha que a velocidade da partícula estudada seja igual a v_{rms}. Além disso, suponha que a atmosfera terrestre seja composta por 80% de nitrogênio e 20% de oxigênio, e que o líquido estudado seja água.

Calcule a distância que a partícula escapada percorre na atmosfera antes de colidir, conhecida como comprimento médio livre. Expresse essa distância em termos da densidade numérica da atmosfera e da seção transversal geométrica das partículas.

c) Calcule a taxa de variação do momento de uma partícula escapando. Divida a variação do momento pelo intervalo de tempo do processo. Suponha que as partículas do líquido perdem todo o seu momento ao colidirem com moléculas de ar.

O tempo médio para a próxima colisão é o comprimento médio livre dividido pela velocidade da partícula.

Sabendo que, nesse intervalo de tempo, um momento igual ao momento da partícula do líquido foi transferido para a molécula de ar, use a segunda lei de Newton para calcular a força exercida pela partícula do líquido sobre a molécula de ar.

d) A pressão é a força exercida sobre uma superfície. Encontre uma expressão para a pressão de vapor de um líquido. Você pode deixar a sua responsa em função das seções transversais da água e do ar, S_w e S_a reespectivamente.

e) Usando a relação de equilíbrio hidrostático e assumindo aceleração gravitacional constante, densidade do ar constante e pressão nula nas camadas superiores da atmosfera, encontre uma relação para a pressão próxima à superfície da Terra. Expresse essa relação em termos da densidade do ar, aceleração gravitacional e espessura da atmosfera.

f) Adicione a condição necessária para a ebulição, igualando a pressão atmosférica próxima à superfície da Terra (obtida acima) à pressão de vapor. Simplifique o resultado até obter:

$$T = \frac{mhgS_w}{3k_B S_a} \tag{3}$$

Onde m é o peso médio das moléculas de ar, g é a aceleração gravitacional, h é a espessura da atmosfera, e os outros parâmetros foram descritos nas partes anteriores.

g) Determine o peso médio das moléculas de ar para a composição mencionada no início do problema.

h) Use o conceito do raio de Bohr para estimar a razão entre as seções transversais. Suponha um elétron em órbita circular ao redor de um próton, onde a força dominante é a força de Coulomb. Usando a suposição de Niels Bohr $L = n\hbar$, encontre a distância do elétron ao núcleo em termos de constantes físicas, n e o número atômico Z.

i) Calcule a seção transversal dos átomos de ar e de líquido. Assuma que cada molécula de líquido é composta por dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, e que as partículas de ar consistem em dois átomos de oxigênio e dois de nitrogênio. Encontre a razão entre as seções transversais S_i/S_a.

j) Considere $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$ e a altura da atmosfera como 100 km. Determine o ponto de ebulição da água.

[3] **Problema 7.** (Adaptado Iran Problem Set) Dr. Shahram Abbassi é um dos cientistas iranianos mais reconhecidos no campo dos discos de acreção. Em uma de suas pesquisas recentes sobre a gigantesca nuvem molecular B32, ele descobriu uma estrela semelhante ao Sol no centro dessa nuvem específica. Segundo suas pesquisas, essa nuvem possui uma massa de $10^6 M_\odot$, um raio de 30 pc e uma viscosidade muito alta, tão grande que, se a nuvem entrasse em colapso, todo o sistema colapsaria com simetria esférica.

O mais importante é calcular o calor específico a volume constante (C_v) para essa nuvem. Com base nos dados fornecidos e utilizando aproximações razoáveis, determine um limite para C_v de modo que a acreção seja possível. Esses valores variam dependendo da massa e do raio da núvem? O que podemos concluir com o resultado?