Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Termodinâmica

[3] **Problema 1.** Uma galáxia possuí na ordem de 10^{10} estrelas, por essa quantidade imensa, podemos modelar uma galáxia como sendo uma núvem de gás ideial, onde cada estrela seria equivamente a uma partícula do Gás.

O objetivo dessa questão é utilizar esse modelo teórico para estudar algumas propriedades de galáxias. Para isso, vamos fazer as seguintes suposições:

i) A galáxia é esférica e se encontra em equilíbrio hidrostático.

ii) A densidade de massa da galáxia é constante e tem valor ρ.

iii) As massas das estrelas são pequenas o suficiente para que as interações interestelares possam ser desconsideradas.

a) Considerando um sistema de gás ideal, encontre uma expressão para a pressão em função da densidade ρ, da temperatura, T, da massa de cada partícula μ e constantes físicas.

b) No nosso modelo teórico, não faz sentido pensar em temperatura, então precisamos encontar um substituto para ela. Utilizando o teorema da equipartição de energia, encontre uma expressão para $T(r)$ e $P(r)$.

Solução

a) Partidindo da equação de Clepeiron,

$$PV = Nk_BT$$

Vamos multiplicar os dois lados por μ,

$$P\mu V = N\mu k_BT$$

$$P\mu = \frac{N\mu}{V}k_BT$$

Mas note que $N\mu$ equivale a massa total, assim,

$$\rho = \frac{N\mu}{V}$$

E com isso, obtemos,

$$\boxed{P\mu = \rho k_B T}$$

Essa expressão será utilizada com bastante frequencia na parte de termodinâmica dessa lista.

b) Pelo teorema da equipartição de energia,

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{3k_B T}{2}$$

Logo,

$$T = \frac{\mu v^2}{3k_B}$$

Como as estrelas possuem massa e velocidade, essa é uma substituição aceitavel. Podemos calcular v pela equação vis-viva, considerando órbitas circulares,

$$v^2 = \frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r}{3}$$

Assim,

$$\boxed{T(r) = \frac{4\pi G\rho\mu r}{9k_B}}$$

Para $P(r)$, vamos substituir na fórmula,

$$\boxed{P(r) = \frac{\rho k_B T(r)}{\mu} = \frac{4\pi G\rho^2 r}{9}}$$

[2] **Problema 2.** Nessa questão, vamos fazer um estudo sobre o coeficiente adiabático de estrelas. Considere uma o exterior de uma estrela se dá por vácuo a temperatura $T = 0$.

a) Todas as estrelas são corpos em equilíbrio hidrostático. Sabendo disso, qual a pressão na superfície de uma estrela de massa M e raio R.

b) Considere agora, que a estrela se expanda em δR, como a pressão variaria? Se necessário utilize que $(1+x)^n \approx 1 + nx$.

c) Agora, conclua qual o valor de γ mínimo, γ_{min} a estrela deve ter para se manter gravitacionalmente ligada (assuma que ela se expande de maneira adiabática)?

Solução

a) Utilizando $P = F/A$ temos

$$P(R) = \frac{GM^2}{4\pi R^4}$$

b) Desse modo

$$P(R+\delta R) = \frac{GM^2}{4\pi}(R+\delta R)^{-4} = \frac{GM^2}{4\pi R^4}\left(1+\frac{\delta R}{R}\right)^{-4}$$

Utilizando a aproximação fornecida pelo enunciado

$$\boxed{P(R+\delta R) = \frac{GM^2}{4\pi R^4}\left(1-\frac{4\delta R}{R}\right) = P\left(1-\frac{4\delta R}{R}\right)}$$

c) Na expanssão adiabática, PV^γ é consntate, como $V \propto R^3$, vale que $PR^{3\gamma}$ é constante. Desse modo

$$PR^{3\gamma} = (P+\delta P)(R+\delta R)^{3\gamma}$$

Utilizando o mesmo raciocíio do item anterior

$$PR^{3\gamma} = (P+\delta P)R^{3\gamma}\left(1+\frac{\delta R}{R}\right)^{3\gamma}$$

$$P = (P+\delta P)\left(1+\frac{3\gamma\delta R}{R}\right)$$

Substituindo $P+\delta P$

$$1 = \left(1-\frac{4\delta R}{R}\right)\left(1+\frac{3\gamma\delta R}{R}\right)$$

Desse modo

$$\left(1-\frac{4\delta R}{R}\right)^{-1} = 1+\frac{3\gamma\delta R}{R}$$

Utilizando novamente a aproximação binomial do lado esquerdo da equação e resolvendo para γ obtemos

$$\boxed{\gamma = \frac{4}{3}}$$

[4] **Problema 3.** Há vários modelos para a atmosfera do nosso planeta, vamos explorá-los e encontrar os efeitos físicos de cada um.

a) Primeiramente, vamos considerar o modelo isotérmico (T = cte). Considerando que cada partícula de ar possuí massa μ, a atmosfera possuí $P(0) = P_0$, encontre uma fórmula para a pressão em função da altura, $P(h)$.

b) Um modelo mais real da atmosfera é na verdade, adiabática, uma vez que o ar é um péssimo condutor de calor. Considerando que o ar possuí coeficiente de Poisson γ, encontre uma fórma para $P(h)$, no modelo adiabático. Considere que a nivel do mar, a pressão e a temperatura valem $P(0)$ e $T(0)$.

c) Encontre uma expressão para dT/dh para o modelo anterior e estime seu valor. O resultado é condizente com a realidade?

Solução

a) Da relação

$$P\mu = \rho k_B T$$

Assim, como $T = cte$,

$$\frac{P(h)}{P(0)} = \frac{\rho(h)}{\rho(0)}$$

O gradiente de pressão é dado pela lei de stevin,

$$\frac{dP(h)}{dh} = -g\rho(h)$$

Substituindo $\rho(h)$,

$$\frac{dP(h)}{dh} = \frac{-gP(h)\rho(0)}{P(0)}$$

Separando os termos,

$$\frac{dP(h)}{P(h)} = \frac{-g\rho(0)}{P(0)}dh$$

Integrando dos dois lados,

$$\int_0^h \frac{dP(h)}{P(h)} = \ln\left(\frac{P(h)}{P(0)}\right)$$

$$\int_0^h dh = h$$

Assim,

$$P(h) = P(0)e^{-\frac{g\rho(0)}{P(0)}h}$$

Por fim, vamos eliminar o termo $\rho(0)$, analisando a relação de clepeyron,

$$P(0)\mu = \rho(0)k_B T \rightarrow \rho(0) = \frac{P(0)\mu}{k_B T}$$

Substituindo,

$$\boxed{P(h) = P(0)e^{-\frac{\mu g h}{k_B T}}}$$

b) No modelo adiabático, temos,

$$PV^{\gamma} = cte$$

Como $V \propto \rho^{-1}$,

$$P\rho^{-\gamma} = cte$$

Ou seja,

$$\rho(h) = \left(\frac{P(0)}{P(h)}\right)^{-1/\gamma}\rho(0) = \left(\frac{P(h)}{P(0)}\right)^{1/\gamma}\rho(0)$$

Substituindo na expressão do gradiente de pressão,

$$\frac{dP(h)}{dh} = -g\rho(h) = -\left(\frac{P(h)}{P(0)}\right)^{1/\gamma}\rho(0)g$$

Separando os termos e integrando,

$$\int_0^h P(h)^{-1/\gamma}dP(h) = -P(0)^{-1/\gamma}\rho(0)g\int_0^h dh$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}(P(h)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - P(0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}) = -\frac{\mu g z}{k_B T(0)}P(0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Aqui usamos que,

$$P(0)\mu = \rho(0)k_B T(0)$$

Isolando $P(h)$

$$\boxed{P(h) = P(0)\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g h}{k_B T(0)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

c) Para processos adiabáticos,

$$PV^{\gamma} = cte$$

$$V \propto \frac{T}{P}$$

Logo,

$$P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cte$$

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cte$$

Assim,

$$T = P(0)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T(0)P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Derivando,

$$\frac{dT}{dh} = P(0)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T(0)\frac{\gamma-1}{\gamma P^{1/\gamma}}\frac{dP}{dh}$$

Do item anterior, temos a expressão para P em função de h. Efetivando a derivada,

$$\frac{dP}{dh} = P(0)\frac{d}{dh}\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu gh}{k_BT(0)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Utilizando a regra da cadeia,

$$\frac{dP}{dh} = \frac{\gamma}{\gamma-1}P(0)\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu gh}{k_BT(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{k_BT(0)}\right)$$

Simplfiicando,

$$\frac{dP}{dh} = -P(0)\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu gh}{k_BT(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\mu g}{k_BT(0)}$$

Substituindo na expressão para dT/dh,

$$\frac{dT}{dh} = -P(0)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T(0)\frac{\gamma-1}{\gamma P^{1/\gamma}}P(0)\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu gh}{k_BT(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\mu g}{k_BT(0)}$$

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}P(0)^{\frac{1}{\gamma}}P^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu gh}{k_BT(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\mu g}{k_B}$$

Substituindo P,

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}P(0)^{\frac{1}{\gamma}}\left(P(0)\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu gh}{k_BT(0)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu gh}{k_BT(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\mu g}{k_B}$$

Continunado a simplificar os termos, obtemos uma expressão fofa,

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{k_B}$$

Podemos aproximar o ar para um gás diatômico, $\gamma = \frac{7}{5}$, de massa, $\mu \approx 30\text{u}$. Fazendo os calculos, obtemos,

$$\boxed{\frac{dT}{dh} \approx -10,03 \text{ K/km}}$$

O que é um valor bem condizente com a realidade.

[5] **Problema 4.** Um dos corpos mais fascinantes do universo são Buracos Negros. Nessa questão, vamos estudar um pouco da Termodinâmica relacionada a esses tipos de objeto. Para essa questao utilizaremos unidades naturais, i.e.: $c = G = \hbar = k_B = 1$. Nessa convenção, a massa do buraco negro é descrita pela equação:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dL + \Phi dQ$$

Aqui, os valores se restringem ao horizonte de eventos, ou seja, κ é a aceleração da gravidade no horizonte de eventos, A, sua área, Ω a velocidade angular do buraco negro, L seu momento de inercia, Φ o potencial eletríco e Q a sua carga.

Parte 1: Termodinâmica Básica

a) Um dos conceitos fundamentais da termodinâmica é o conceito de entropia, utilizando seus conhecimentos sobre a mesma, explique bravimente a desigualdade:

$$\oint dS \geq 0$$

b) Dos 3 fatores que regem a massa de um buraco negro(dA, dL, dQ), apenas dA segue a mesma de sigulade da entropia, por que isso se verifica sempre verdade?

Para os próximos itens, considere um buraco negro sem spin e sem carga.

c) Bekenstein e Hawking conseguiram provar a chamada *Entropia Bekenstein-Hawking* que relaciona a entropia com a área do Buraco Negro (lembre-se que estamos utilziando unidades naturais, por isso, algumas dimensões podem não fazer sentido). Bekenstein e Hawking descobriram que para um buraco negro $S \equiv \frac{A}{4}$. A equação que nós temos então é:

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi}d\left(\frac{A}{4}\right)$$

Fazendo uma analogia a dM com alguma função de estado, encontre a temperatura do buraco negro em função de κ.

Ainda há um termo importante faltando na fórmula anterior, a Pressão relacioanda a densidade de energia escura, Λ.

d) A pressão devido a energia escura é dada por:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$$

Onde Λ é constante. Isso nos mostra que VdP é nulo, ou seja, pode ser adicionado livrimente a expressão anterior. Com isso podemos concluir que a massa do buraco negro, na verdade se relaciona com outro potencial termodinâmico, qual é ele?

e) Note que o volume, $V = V$ e a entropia, $S = A/4$ não são mais independentes em buracos negros. Assumindo que o horizonde de eventos do buraco negro é uma esfera, encontre uma relação entre S e V. Isso é mais uma prova que a energia intera, $U = U(S, V)$ não é o melhor potencial termodinâmico para trabalharmos.

Parte 2: Ciclo de Carnot Para Buracos Negros

a) O objetivo dessa parte da questão é construir um modelo teórico para um ciclo de Carnot dentro de buracos negros. Mas primerio prove um resultado importante, para buracos negros, adiabaticos e isocóricos devem ser equivalentes para buracos negros.

b) Calcule a capacidade termica a pressão constante de um Buraco negro. Seu resultado deve ser algo bizarro.

c) Use o fato de que $Q = T\Delta S$ ao longo das isotermas, juntamente com os resultados dos resultados anteriores partes, para calcular a eficiência de uma máquina de Carnot de buraco negro e confirmar que você obtenha a eficiência de Carnot. Maravilhe-se com o quão mais rápido esse cálculo é do que o derivação típica da eficiência de Carnot, e observe que você também inadvertidamente também calculou a eficiência do ciclo Stirling.

Caso voce se interesse pelo assunto, há um artigo interessante que fala especificamente sobre o tema de ciclos em buracos negros e pode ser encontrado aqui.

Parte 3: Tempo de Vida e Evaporação de Buracos Negros

a) Como calculado na parte 1, buracos negros possuem uma temperatura. Em decorrencia a isso, eles emitem radiação, como descrita na Lei de Stefan-Boltzmann. Sabendo disso, ache uma relação entre o tempo de vida de um buraco negro e a sua massa M.

Solução

Parte 1: Termodinâmica Básica

a) A desigualdade representa a segunda lei da termodinâmica. De maneira breve, ela nos mostra que a variação de entropia sempre é positiva, ou seja, tudo tende a desordem.

b) Note que nenhuma Lei da física impede que um buraco negro perca velocidade angular, $dL < 0$, ou carga, $dQ < 0$. Mas ao analisarmos a área do buraco negro temos algo interessante. Considerando o horizonte de enventos, dado por uma esfera com o raio de R_{sch}. Como esse é definido pela distância da qual a um objeto se movendo a velocidade luz não consegue mais escapar da atração gravitacional do buraco negro, podemos obtelo por conservação de energia,

$$-\frac{GMm}{R_{sch}} + \frac{mc^2}{2} = 0 \to R_{sch} = \frac{2GM}{c^2}$$

Logo a área do horizonte de eventos é dada por,

$$A = 4\pi R_{sch}^2 = \frac{8\pi G^2 M^2}{c^4}$$

Em unidades naturais,

$$A = 8\pi M^2$$

Assim,

$$dA = 16\pi M dM$$

Mas, um buraco negro não pode perder massa, uma vez que nada pode escapar do horizonte de eventos. Assim, $dM > 0$ e conseguentemente $dA > 0$. Assim, podemos concluir que tambem é valido,

$$\oint dA \geq 0$$

Para buracos negros.

c) Da Relação massa energia,

$$U = M \to dU = dM$$

(Lembrando que estamos utilizando unidades naturias, então $Mc^2 = M$). Desse modo, utilizando a primeira Lei da termodinâmica,

$$dU = TdS - PdV$$

Logo,

$$T = \left.\frac{dU}{dS}\right|_V = \left.\frac{dM}{dS}\right|_V$$

Utilizando a formula da entropia fornecida pelo enunciado, (análoga a obtida no item anterior).

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi}\left(\frac{A}{4}\right) = \frac{\kappa}{2\pi} dS$$

utilizando a equação do item anterior, podemos perceber que $\kappa = 1/4M$, Substituindo na fórmula de T,

$$\boxed{T = \frac{1}{8\pi M}}$$

d) Utilizando a fórmula obtida para T,

$$dM = TdS$$

Adicionando o termo nuleo VdP, temos,

$$dM = TdS + VdP$$

Mas note que essa é identica a Entalpia, H:

$$H = U + PV \rightarrow dH = (TdS - PdV) + (PdV - VdP) = TdS - VdP$$

Desse modo, podemos dizer que a massa equivale a Entalpia.

e) O Volume de uma esfera é dado por,

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Enquando a área é dada por $A = 4\pi R^2$, então, $R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \equiv \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Substituindo na fórmula do volume,

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{S}{\pi}\right)^{3/2}$$

Simplificando,

$$\boxed{V = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}S^{3/2}}$$

Ou seja, o volume e a entropia são dependentes de si. Como a energia interna é uma função do volume **e** da entropia, não faz sentido dizer que esta equivale a massa do buraco negro.

Parte 2: Ciclo de Carnot Para Buracos Negros

a) Utilizando a relação do item anterior,

$$dV = \frac{2}{\pi}SdS$$

Ou seja, um ciclo adiabático ($dS = 0$) equivale a um ciclo isocório ($dV = 0$).

b) Para calcular a capacidade térmica a pressão constante,

$$C_P = \left.\frac{\partial Q}{\partial T}\right|_P = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_P = \frac{dM}{dT}$$

Usando a fórmula para a temperatura,

$$T = \frac{1}{8\pi M} \to M = \frac{1}{8\pi T}$$

$$\boxed{C_P = \frac{dM}{dT} = -\frac{1}{8\pi T^2}}$$

c) A effinciência de um ciclo é dada por,

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_C - Q_H}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

Onde Q_H é o calor que entra no ciclo durante a fase quente e Q_C é o valor que entra nele durante a fase fria. Assim, definindo T_H e T_C como as temperaturas quentes e frias, reespectivamente. Considere que o ciclo opera nas seguintes $1-2$ temepratura quente e $3-4$ temperatura fria. Assim,

$$Q_H = T_H \Delta S_{1\to 2}$$

$$Q_C = T_C \Delta S_{3\to 4}$$

Utilizando a expressão do item $1.e$, temos,

$$S = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} V^{2/3}$$

Assim,

$$\Delta S_{1\to 2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(V_2^{2/3} - V_1^{2/3}\right)$$
$$\Delta S_{3\to 4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(V_4^{2/3} - V_3^{2/3}\right)$$

Logo, a eficiencia pode ser escrita,

$$\eta = 1 - \frac{T_C\left(V_4^{2/3} - V_3^{2/3}\right)}{T_H\left(V_2^{2/3} - V_1^{2/3}\right)}$$

Mas como para buracos negros, adabáticas e ispcórias são identicas, $V_1 = V_3$ e $V_2 = V_4$!, logo,

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}}$$

Que é a eficiencia de Carnot!

Parte 3: Tempo de Vida e evaporação de Buracos Negros

a) A Lei de Stefan Boltzmann diz que a luminosidade (Potência) é dado por,

$$L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{dM}{dt} = A\sigma T^4$$

Mas note que $A \propto M^2$ e $T \propto 1/M$, assim,

$$\frac{dM}{dt} \propto M^2 \left(\frac{1}{M}\right)^4 = \frac{1}{M^2}$$

Separando as variaveis,

$$M^2 dM \propto dt$$

Por fim, integrando, obtemos,

$$\boxed{t \propto M^3}$$

[3] **Problema 5.** Considere que um foguete utiliza como combustível um gás ideal diatômico. Seu mecanismo de funcionamento é bem simples: O gás parte de uma camera a temperatura T_1, que possuí área de secção transversal A_1, o gás entao, flui adiabaticamente e é expelido em uma abertura de área A_2, com pressão, P_2 e temperatura $T_2 < T_1$. Considerando que o fluxo é contínuo, determine o empuxo sentido pelo foguete.

Solução

Como o processo é adiabático, temos

$$PV^\gamma \propto P\left(\frac{T}{P}\right)^\gamma = cte$$

Como o gás é diatômico, $C_P = 7/2R$ e $C_V = 5/2R$, pela definição $\gamma = C_P/C_V = 7/5$
Assim, temos

$$P_1\left(\frac{T_1}{P_1}\right)^\gamma = P_2\left(\frac{T_2}{P_2}\right)^\gamma$$

Substituindo o valor de γ

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{7/2}$$

Sejam v_1 e v_2 a velocidade do gás nos dados momentos, como o fluxo é contínuo, devemos ter

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

E pela lei dos gases ideias

$$P\mu = \rho R T \to \rho \propto \frac{P}{T}$$

Substituindo na expressão anterior,

$$\frac{P_1 v_1 A_1}{T_1} = \frac{P_2 A_2 A_2}{T_2}$$

Combinando está e a primeira equação, temos

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{5/2}$$

Utilizando a equação de Bernoulli para gases

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 + C_P R T_1 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + C_P T_2$$

Resolvendo para v_2

$$v_2^2 = \frac{7R(T_1 - T_2)}{\mu(1 - (A_1/A_2)^2(T_2/T_1)^5)}$$

Finalmente, utilizando a segunda Lei de Newton,

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v_2 = \rho_2 A_2 v_2^2 = \boxed{\frac{7P_2A_2(T_1 - T_2)}{T_2(1 - (A_1/A_2)^2(T_2/T_1)^5)}}$$

[5] **Problema 6.** (Adaptado Iran Problem Set) Este problema visa calcular o ponto de ebulição de líquidos.

As partículas de um líquido movem-se com diferentes velocidades dependendo da temperatura, e algumas dessas partículas podem escapar das forças intermoleculares e da gravidade terrestre (que será negligenciada neste problema), deixando a superfície do líquido. Essas partículas transferem seu momento, criando pressão ao colidirem com o ambiente ao redor. Essa pressão é conhecida como pressão de vapor do líquido. O ponto de ebulição é a temperatura na qual a pressão de vapor iguala-se à pressão atmosférica ao redor do líquido.

a) Usando a distribuição de Maxwell-Boltzmann, encontre uma relação para a velocidade quadrática média v_{rms}.

A distribuição de Maxwell-Boltzmann é:

$$n(v)\,dv = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\, 4\pi v^2 dv \tag{1}$$

A velocidade quadrática média é dada por:

$$v_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = \frac{1}{n}\int_0^\infty v^2 n(v)dv \tag{2}$$

b) Suponha que a velocidade da partícula estudada seja igual a v_{rms}. Além disso, suponha que a atmosfera terrestre seja composta por 80% de nitrogênio e 20% de oxigênio, e que o líquido estudado seja água.

Calcule a distância que a partícula escapada percorre na atmosfera antes de colidir, conhecida como comprimento médio livre. Expresse essa distância em termos da densidade numérica da atmosfera e da seção transversal geométrica das partículas.

c) Calcule a taxa de variação do momento de uma partícula escapando. Divida a variação do momento pelo intervalo de tempo do processo. Suponha que as partículas do líquido perdem todo o seu momento ao colidirem com moléculas de ar.

O tempo médio para a próxima colisão é o comprimento médio livre dividido pela velocidade da partícula.

Sabendo que, nesse intervalo de tempo, um momento igual ao momento da partícula do líquido foi transferido para a molécula de ar, use a segunda lei de Newton para calcular a força exercida pela partícula do líquido sobre a molécula de ar.

d) A pressão é a força exercida sobre uma superfície. Encontre uma expressão para a pressão de vapor de um líquido. Você pode deixar a sua responsa em função das seções transversais da água e do ar, S_w e S_a reespectivamente.

e) Usando a relação de equilíbrio hidrostático e assumindo aceleração gravitacional constante, densidade do ar constante e pressão nula nas camadas superiores da atmosfera, encontre uma relação para a pressão próxima à superfície da Terra. Expresse essa relação em termos da densidade do ar, aceleração gravitacional e espessura da atmosfera.

f) Adicione a condição necessária para a ebulição, igualando a pressão atmosférica próxima à superfície da Terra (obtida acima) à pressão de vapor. Simplifique o resultado até obter:

$$T = \frac{mhgS_w}{3k_B S_a} \tag{3}$$

Onde m é o peso médio das moléculas de ar, g é a aceleração gravitacional, h é a espessura da atmosfera, e os outros parâmetros foram descritos nas partes anteriores.

g) Determine o peso médio das moléculas de ar para a composição mencionada no início do problema.

h) Use o conceito do raio de Bohr para estimar a razão entre as seções transversais. Suponha um elétron em órbita circular ao redor de um próton, onde a força dominante é a força de Coulomb. Usando a suposição de Niels Bohr $L = n\hbar$, encontre a distância do elétron ao núcleo em termos de constantes físicas, n e o número atômico Z.

i) Calcule a seção transversal dos átomos de ar e de líquido. Assuma que cada molécula de líquido é composta por dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, e que as partículas de ar consistem em dois átomos de oxigênio e dois de nitrogênio. Encontre a razão entre as seções transversais S_i/S_a.

j) Considere $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$ e a altura da atmosfera como 100 km. Determine o ponto de ebulição da água.

Solução

a) Definindo as variáveis

$$C = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Desse modo, podemos expressar

$$n(v)dv = Ce^{-\frac{\beta m v^2}{2}}v^2 dv$$

utilizando a expressão para v_{rms} fornceida pela questão,

$$v_{rms}^2 = \frac{C}{n}\int_0^\infty e^{-\frac{\beta m v^2}{2}}v^4 dv$$

Para resolver a integral, temos

$$\int_0^\infty e^{-av^2}v^4 dv = \frac{d^2}{da^2}\int_0^\infty e^{-av^2}dv$$

Onde

$$a = \frac{\beta m}{2}$$

A integral do lado direito é bem conhecida e resulta em $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Ou seja

$$\int_0^\infty e^{-av^2}v^4 dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{d^2}{da^2}a^{-1/2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

Desse modo,

$$v_{rms}^2 = \frac{3C}{8n}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

Substituindo C e a, temos

$$v_{rms}^2 = \frac{3}{2}\pi\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{2^5\pi}{\beta^5 m^5}}$$

Por fim, simplificando

$$\boxed{v_{rms}^2 = \frac{3}{m\beta} = \frac{3k_BT}{m}}$$

b) Conisdere $P(t)$ a probabilidade da partícula **não** colidir em um tempo t. A propabilidade da particula não colidir em um tempo t e não coldir no tempo dt seguinte é dada por $P(t+dt) = P(t)P(dt)$ (prorpiedade multiplicativa), mas também temos

$$P(t+dt) \approx P + \frac{dP}{dt}dt$$

Em um tempo dt a particula varre um volume $dV = \sigma v dt$, onde σ é o parâmetro de impato. A propabilidade da perticula colidir em um tempo dt é dada então por $P'(dt) = ndV = n\sigma v dt$, desse modo (lembrando P(dt) é a propabilidade da particula **NÃO** colidir) $P(dt) = 1 - n\sigma v dt$

Igualando as expressões para $P + dt$, temos

$$P + \frac{dP}{dt}dt = P(1 - n\sigma v dt)$$

Trablhando nesta expressão,

$$dP = -Pn\sigma v dv \rightarrow \frac{dP}{P} = -n\sigma v dt$$

Integrando dos dois lados e utilziando que $P(0) = 1$, temos

$$P(t) = e^{-n\sigma v t}$$

Então, a probabilidade de uma particula sobreviver um tempo t e depois colidir no tempo dt seguinte é

$$J(t)dt = P(t)(1 - P(dt)) = e^{-n\sigma v t} n\sigma v dt$$

Assim, o tempo médio entre colisões é

$$\tau = \int_0^\infty tJ(t)dt = \int_0^\infty e^{-n\sigma v t} n\sigma v dt = \frac{1}{n\sigma v}$$

O livre caminho médio, é dado então por

$$\lambda = v_{radial}\tau = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

Para achar σ, vamos definir como r_H o raio da molécula de agua, e semelhantemente r_O e r_N. Olhando o seguinte esquema

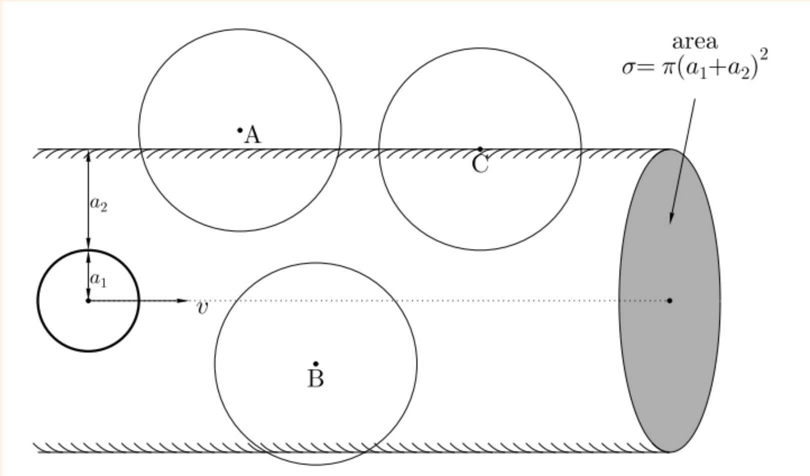

Figura 1: Fonte: Concepts In Thermal Physics, Blundell and Blundell

Para o nitrogenio, $\sigma_N = \pi(r_H + r_N)^2$ e para o oxigenio, $\sigma_O = \pi(r_H + r_O)^2$. Como a atmosfera é feito de $0,8N$ e $0,2O$, é valido que

$$\sigma \equiv S_a = 0,2\sigma_O + 0,8\sigma N$$

Assim, temos

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n(0,8\sigma_0 + 0,2\sigma_0)}}$$

c) Assumindo que a particula perde todo seu momento ao colidir com uma molécula de ar, temos $\delta p = mv_{rms}$. Cada colisção acontece em um tempo $\delta t = \tau$, assim,

$$F = \frac{\delta p}{\delta t} = \frac{mv_{rms}}{\tau} = nS_a v_{rms}^2 \boxed{= 3nS_a k_B T}$$

d) Utilizando a definição de pressão

$$P = \frac{F}{\S_w} = \boxed{3n\frac{S_a}{S_w}k_B T}$$

e) Utilizando a equação do equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g$$

Como ρ e g são constantes,

$$P = -\rho g \int_h^0 dh = \boxed{\rho g h}$$

Onde h é a espessura da atmosfera.

f) Igualando as pressões,

$$\rho g h = 3\frac{S_a}{S_w} n k_B T$$

Resolvendo paar T, temos

$$T = \frac{\rho g h}{3 n k_B}\frac{S_w}{S_a}$$

Como n é a densidade numérica de particulas e ρ é a densidade de massa, temos $\rho/n = m$, assim

$$\boxed{T = \frac{m g h}{3 k_B}\frac{S_w}{S_a}}$$

g) Fazendo uma média ponderada,

$$\boxed{m = 0,8 m_N + 0,2 m_O}$$

h) a força que o eletron sente é dada por,

$$F = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Igualando esta a força centrípeta

$$\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \omega^2 r$$

Porém, pela definição de momento angular, Temos

$$L = m_e r^2 \omega \to \omega = \frac{L}{m_e r^2} = \frac{n\hbar}{m_e r^2}$$

Substituindo na expressão anterior

$$\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \left(\frac{n\hbar}{m_e r^2}\right)^2 r$$

Resolvendo para r,

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Z e^2 m_e}$$

i) Para a água, temos, $r_w = 2r_H + r_O$ e para o ar, $r_a = 2(r_N + r_O)$, como $S_i \propto r_i^2$, temos

$$\frac{S_w}{S_a} = \frac{(2r_H + r_O)^2}{4(r_N + r_O)^2}$$

Assumindo que todos os elétrons estão no nível mais baixo ($n = 1$), que $Z_H = 1,\ Z_N = 7,\ Z_O = 8$ e que $r \propto 1/Z$, temos

$$\boxed{\frac{S_w}{S_a} = \frac{(2/Z_H + 1/Z_O)^2}{4(1/Z_N + 1/Z_O)^2} \approx 15,73}$$

j) Substituindo na fórmula,

$$T = \frac{(2 \cdot 14 + 2 \cdot 16) \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^5 \cdot 15,73}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \boxed{\approx 380 \text{ K}}$$

O que é uma estimativa bastante coerente com a relaidade, $T = 373$ K.

[3] **Problema 7.** (Adaptado Iran Problem Set) Dr. Shahram Abbassi é um dos cientistas iranianos mais reconhecidos no campo dos discos de acreção. Em uma de suas pesquisas recentes sobre a gigantesca nuvem molecular B32, ele descobriu uma estrela semelhante ao Sol no centro dessa nuvem específica. Segundo suas pesquisas, essa nuvem possui uma massa de $10^6 M_\odot$, um raio de 30 pc e uma viscosidade muito alta, tão grande que, se a nuvem entrasse em colapso, todo o sistema colapsaria com simetria esférica.

O mais importante é calcular o calor específico a volume constante (C_v) para essa nuvem. Com base nos dados fornecidos e utilizando aproximações razoáveis, determine um limite para C_v de modo que a acreção seja possível. Esses valores variam dependendo da massa e do raio da núvem? O que podemos concluir com o resultado?

Solução

Esse limite será dado pelo teorama do virial, quando,

$$\langle U \rangle = -2\langle K \rangle$$

Podemos modelar a nuvem como um gás, de modo que sua energia cinética seja dada por $\frac{3}{2}Nk_BT$. A sua energia potêncial é eneriga potencial de uma esfera, dada por $U = -3GM^2/5R$. Assim

$$\frac{3GM^2}{5R} = 3\frac{M}{m_p}k_BT$$

Onde m é a massa de uma partícula da núvem.
Desse modo,

$$T = \frac{GMm_p}{5k_BR}$$

Em função do calor específico a volume consatnte, a energia é dada por,

$$MC_vT$$

Voltando a igualdade,

$$C_v = \frac{3GM}{5RT}$$

Substituindo T,

$$\boxed{C_v = \frac{k_B}{m} \approx 4.1 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}$$

Note que esse valor depende apenas da massa das partículas que compões a núvem de gás. Para uma compostade hidrogênio, o valor é Surpreendentemente proximo do valor da água $C_{v,agua} = 4,2 \cdot 10^3$ J/kg K.